ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DEUXIÈME — ANNÉE 1873.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1873

1873. Mar. 25 —
1874. Jan. 14

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

NOTES

SUR

DIVERS POINTS DE LA THERMODYNAMIQUE,

PAR M. PHILLIPS,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Note sur les changements d'état d'un corps quelconque, suivant une ligne adiabatique.

Je me suis proposé, dans cette Note, d'examiner comment la température d'un corps varie avec son volume et sa pression, lorsqu'il change d'état suivant une ligne adiabatique.

Soient

t la température du corps;
p sa pression;
v son volume spécifique;
U sa chaleur interne;
Q la chaleur qu'il reçoit du dehors;
c sa chaleur spécifique à pression constante;

c_1 sa chaleur spécifique à volume constant;
a une constante, égale à 273;
A l'équivalent calorifique du travail.

On a les équations générales

$$dt = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) dv, \tag{1}$$

$$dU = X dp + Y dv, \tag{2}$$

$$dQ = X dp + (Y + Ap) dv, \tag{3}$$

$$X = c_1 \left(\frac{dt}{dp}\right), \tag{4}$$

$$Y + Ap = c\left(\frac{dt}{dv}\right). \tag{5}$$

Supposons que le corps change d'état suivant une ligne adiabatique, alors

$$X dp + (Y + Ap) dv = 0. \tag{6}$$

Cette relation, au moyen des équations (4) et (5), revient à

$$c_1 \left(\frac{dt}{dp}\right) \frac{dp}{dt} + c\left(\frac{dt}{dv}\right) \frac{dv}{dt} = 0. \tag{7}$$

En même temps, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$c_1 \left(\frac{dt}{dp}\right) \frac{dp}{dt} + c_1 \left(\frac{dt}{dv}\right) \frac{dv}{dt} = c_1. \tag{8}$$

Des relations (7) et (8) on déduit

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c_1}{c - c_1} \frac{1}{\left(\frac{dt}{dv}\right)}. \tag{9}$$

Cette formule montre que, dans le changement d'état suivant une ligne adiabatique, la température et le volume varient en sens inverse toutes les fois que la fraction $\frac{c_1}{c - c_1}$ est positive et que, de plus, sous pression constante, le volume et la température varient dans le même sens, ce qui est le cas très-ordinaire.

La formule (9) peut être mise sous une autre forme. On sait qu'on a, d'une manière générale,

$$(10) \qquad (c - c_1)\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dv}\right) = \mathrm{A}(a+t).$$

Substituant dans l'équation (9) la valeur de $(c - c_1)\left(\frac{dt}{dv}\right)$ tirée de l'équation (10), on obtient

$$(11) \qquad \frac{dv}{dt} = -c_1 \frac{\left(\frac{dt}{dp}\right)}{\mathrm{A}(a+t)}.$$

Cette expression fait voir que, dans le changement d'état suivant une ligne adiabatique, la température et le volume varient en sens inverse toutes les fois que la chaleur spécifique à volume constant est positive, et que, de plus, sous volume constant, la pression et la température varient dans le même sens.

Proposons-nous maintenant de voir comment la température varie avec la pression quand le corps change d'état suivant une ligne adiabatique.

On a toujours l'équation (7). En même temps, la relation (1) peut se mettre sous la forme

$$(12) \qquad c\left(\frac{dt}{dp}\right)\frac{dp}{dt} + c\left(\frac{dt}{dv}\right)\frac{dv}{ut} = c.$$

Des équations (7) et (12) on tire

$$(13) \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{c}{c - c_1}\,\frac{1}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}.$$

On conclut de là que, dans le changement d'état suivant une ligne adiabatique, la température et la pression varient dans le même sens, toutes les fois que la fraction $\frac{c}{c - c_1}$ est positive et que, de plus, à volume constant, la pression et la température varient dans le même sens.

On peut encore mettre la formule (13) sous une autre forme. Substituons dans cette formule la valeur de $(c - c_1)\left(\frac{dt}{dp}\right)$, déduite de (10), et

nous aurons

$$\frac{dp}{dt} = c\,\frac{\left(\frac{dt}{dv}\right)}{A(a+t)}. \tag{14}$$

On voit par là que, dans le changement d'état suivant une ligne adiabatique, la température et la pression varient dans le même sens toutes les fois que la chaleur spécifique à pression constante est positive et que, de plus, sous pression constante, le volume et la température varient dans le même sens.

Enfin, soit de la combinaison des équations (9) et (13), soit de celle des équations (11) et (14), on conclut

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{c}{c_1}\,\frac{\left(\frac{dt}{dv}\right)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}. \tag{15}$$

Cette dernière formule montre que la pression et le volume varient en sens inverse l'un de l'autre, toutes les fois que le rapport $\frac{c}{c_1}$ est positif et que, de plus, la température varie dans le même sens que le volume, sous pression constante et dans le même sens que la pression, sous volume constant.

Note sur les diverses formules qui donnent la vitesse d'écoulement d'un gaz permanent par un petit orifice percé dans un réservoir.

Soient

V_1 la vitesse dans la section contractée;
p_0 et v_0 la pression et le volume spécifique dans le réservoir;
p_1 et v_1 la pression et le volume spécifique dans la section contractée; nous admettons que p_1 peut être pris égal à la pression extérieure;
T_0 la température absolue dans le réservoir;
c la chaleur spécifique du gaz à pression constante;

c_1 sa chaleur spécifique à volume constant;

$\gamma = \frac{c}{c_1}$;

A l'équivalent calorifique du travail.

La formule ordinaire, pour calculer la vitesse V_1, est

$$\frac{V_1^2}{2g} = p_0 v_0 \log \frac{p_0}{p_1}. \tag{1}$$

Elle suppose que, pendant que le gaz s'écoule à travers l'orifice, sa température reste constante, ce qui exige que, pendant son écoulement, le gaz reçoive de la chaleur des corps extérieurs.

Une autre formule applicable quand, ainsi que c'est le cas très-ordinaire dans la pratique, le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ est très-peu supérieur à l'unité est

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{1}{\varpi}(p_0 - p_1), \tag{2}$$

où ϖ représente le poids spécifique du gaz, qu'on peut alors regarder comme sensiblement constant.

Cette formule suppose que, pendant que le gaz s'écoule à travers l'orifice, il cède de la chaleur aux corps extérieurs.

On démontre aisément que, toutes les fois que le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ est peu supérieur à l'unité, ce qui est le cas très-général de la pratique, les formules (1) et (2) donnent sensiblement la même valeur de la vitesse V_1.

Enfin on peut calculer la vitesse, en supposant que, pendant son écoulement à travers l'orifice, le gaz ne reçoive pas de chaleur du dehors et n'en émette pas au dehors. C'est là, évidemment, l'hypothèse la plus voisine de la réalité, en raison de la grande vitesse d'écoulement. Partant de là, M. Weisbach, en se fondant sur les principes de la Thermodynamique, a obtenu la formule suivante :

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{cT_0}{A}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \tag{3}$$

Je me propose de comparer cette formule avec les précédentes, pour le cas très-général de la pratique où le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ est peu supérieur à

l'unité, et il résulte de ce qui précède qu'il suffit alors de comparer entre elles les formules (3) et (2).

Désignant par ρ le rapport des seconds membres, on a

$$\rho = \frac{c}{A}\varpi T_0 \frac{1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{p_0 - p_1}.$$

Remplaçons ϖ par $\frac{1}{v_0}$, puis $\frac{1}{v_0}$ par sa valeur tirée de l'équation connue $p_0 v_0 = RT_0$, où R est une constante spéciale au gaz. Nous aurons

$$\rho = \frac{c}{AR} \frac{1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\frac{p_1}{p_0}}.$$

Enfin, à cause de $c - c_1 = AR$, on a

$$\rho = \frac{1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{p_1}{p_0}\right)}. \tag{4}$$

Supposons d'abord, à la limite, $p_1 = p_0$; alors ρ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. En cherchant sa vraie valeur, on trouve, dans ce cas, $\rho = 1$.

Soit maintenant $\frac{p_1}{p_0} = 1 - \delta$, δ étant une petite fraction, et posons

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} = k.$$

En supposant $\gamma = 1{,}41$, on a

$$k = 0{,}291;$$

il vient

$$\rho = \frac{1-(1-\delta)^k}{k\delta}. \tag{5}$$

En développant le numérateur du second membre de l'équation (5)

par la formule du binôme, on trouve

$$(6)\quad \rho = 1 + \frac{1-k}{1.2}\delta + \frac{(1-k)(2-k)}{1.2.3}\delta^2 + \frac{(1-k)(2-k)(3-k)}{1.2.3.4}\delta^3 + \ldots.$$

Comme $k < 1$, cette dernière relation montre que ρ est toujours plus grand que l'unité, et qu'il en diffère d'autant moins que δ est plus petit, ou que le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ est plus voisin de l'unité.

La formule (5) donne les résultats suivants :

Pour	$\delta = 0,00$.....	$\rho = 1$,
»	$\delta = 0,05$.....	$\rho = 1,0186$,
»	$\delta = 0,10$.....	$\rho = 1,03773$,
»	$\delta = 0,50$.....	$\rho = 1,2554$.

Note sur une nouvelle forme des équations générales de la Thermodynamique et sur le coefficient économique des cycles fermés réversibles.

Soient, pour un corps quelconque,
p la pression;
v le volume spécifique;
T la température absolue;
A l'équivalent calorifique du travail;
c la chaleur spécifique à pression constante;
c_1 la chaleur spécifique à volume constant;
U la chaleur interne;
Q la chaleur reçue du dehors;
$Z = \int \frac{dQ}{T}$ une fonction des deux variables indépendantes, laquelle est toujours déterminée pour un corps quelconque.

On sait que $Z =$ const. représente une ligne adiabatique quelconque. Convenons de nommer Z la fonction adiabatique (¹).

(¹) La fonction Z a reçu de M. Clausius le nom d'*entropie*.

p, v et T sont soumis à une relation dépendant de la nature du corps; U et Z sont des fonctions déterminées de p, v et T. Il suit de là que l'on peut regarder p, v et U comme des fonctions déterminées de T et Z. C'est ce que nous allons faire, et voir ce que deviennent les équations générales de la Thermodynamique, T et Z étant choisis comme variables indépendantes.

On a alors

$$dp = \left(\frac{dp}{dT}\right) dT + \left(\frac{dp}{dZ}\right) dZ, \tag{1}$$

$$dv = \left(\frac{dv}{dT}\right) dT + \left(\frac{dv}{dZ}\right) dZ, \tag{2}$$

$$dU = \left(\frac{dU}{dT}\right) dT + \left(\frac{dU}{dZ}\right) dZ. \tag{3}$$

On sait d'ailleurs que

$$dQ = T\,dZ. \tag{4}$$

D'un autre côté,

$$dU = dQ - Ap\,dv,$$

ou, à cause des équations (2) et (4),

$$dU = -Ap\left(\frac{dv}{dT}\right) dT + \left[T - Ap\left(\frac{dv}{dZ}\right)\right] dZ. \tag{5}$$

Exprimons que le second membre de l'équation (5) est une différentielle exacte, et il vient

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)\left(\frac{dv}{dZ}\right) - \left(\frac{dp}{dZ}\right)\left(\frac{dv}{dT}\right) = \frac{1}{A}, \tag{6}$$

relation générale entre les dérivées partielles de la pression et du volume spécifique, quand le corps change d'état suivant une ligne isotherme ou une ligne adiabatique.

On peut tirer de l'équation (6) d'autres formules. On a, à cause de l'équation (4),

$$c\,dT = T\,dZ,$$

où il faut mettre pour dZ sa valeur déduite de l'équation (1) en y fai-

sant $dp = 0$. Il suit de là

$$c = -\mathrm{T}\,\frac{\left(\dfrac{dp}{d\mathrm{T}}\right)}{\left(\dfrac{dp}{d\mathrm{Z}}\right)}. \tag{7}$$

On a, de même,

$$c_1\,d\mathrm{T} = \mathrm{T}\,d\mathrm{Z},$$

où il faut mettre pour $d\mathrm{Z}$ sa valeur déduite de l'équation (2) en y faisant $dv = 0$, d'où résulte

$$c_1 = -\mathrm{T}\,\frac{\left(\dfrac{dv}{d\mathrm{T}}\right)}{\left(\dfrac{dv}{d\mathrm{Z}}\right)}. \tag{8}$$

Tirons des équations (7) et (8) les valeurs de $\left(\dfrac{dp}{d\mathrm{Z}}\right)$ et de $\left(\dfrac{dv}{d\mathrm{Z}}\right)$ et portons-les dans l'équation (6). Nous aurons

$$\left(\frac{dp}{d\mathrm{T}}\right)\left(\frac{dv}{d\mathrm{T}}\right) = -\frac{1}{\mathrm{AT}}\,\frac{cc_1}{c-c_1}, \tag{9}$$

relation générale entre les dérivées de la pression et du volume, par rapport à la température, pour un corps quelconque changeant d'état suivant une ligne adiabatique.

Maintenant, tirons des équations (7) et (8) les valeurs de $\left(\dfrac{dp}{d\mathrm{T}}\right)$ et de $\left(\dfrac{dv}{d\mathrm{T}}\right)$ et portons-les dans l'équation (6). Nous aurons

$$\left(\frac{dp}{d\mathrm{Z}}\right)\left(\frac{dv}{d\mathrm{Z}}\right) = -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{A}(c-c_1)}, \tag{10}$$

relation générale entre les dérivées de la pression et du volume, par rapport à la fonction adiabatique, pour tout corps changeant d'état suivant une ligne isotherme.

Supposons, comme cas particulier, que le corps soit formé par un mélange d'une vapeur saturée et de son liquide. Alors $\left(\dfrac{dp}{d\mathrm{Z}}\right) = 0$, et la formule générale (6) se réduit à

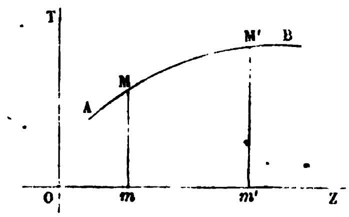
$$\left(\frac{dp}{d\mathrm{T}}\right)\left(\frac{dv}{d\mathrm{Z}}\right) = \frac{1}{\mathrm{A}}. \tag{11}$$

Dans ce cas, p étant une simple fonction supposée connue de T, cette équation s'intègre immédiatement, et donne la relation générale entre v, T et Z.

Voyons maintenant ce que devient le mode ordinaire de représentation graphique de l'état physique d'un corps, lorsqu'on prend T et Z comme variables indépendantes.

Soient (*fig.* 1) OT et OZ deux axes rectangulaires.

Fig. 1.



Supposons qu'à l'instant considéré le corps soit à l'état M; cela signifie qu'à cet instant l'ordonnée $Mm = T$ et l'abscisse $Om = Z$.

Dans ce système, les lignes isothermes sont des droites parallèles à l'axe OZ et les lignes adiabatiques des droites parallèles à l'axe OT.

Soit AB le lieu des états successifs du corps, le sens étant de A vers B. Supposons que, à un certain moment, il soit à l'état M et que, plus tard, il soit parvenu à l'état M', dont les coordonnées sont $M'm'$ et Om'.

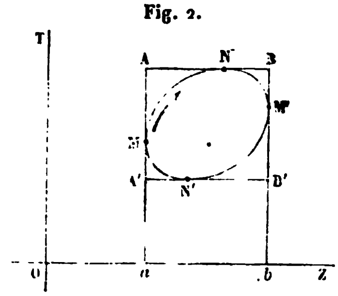
Comme on a, à chaque instant, $dQ = T\,dZ$, on voit que l'aire $m\mathrm{MM}'m'm = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} T\,dZ$ représente la quantité de chaleur reçue du dehors par le corps en passant du premier état au second. Cette aire ou cette quantité de chaleur doit être prise positivement si Z va en croissant de l'état M à l'état M' et négativement dans le cas contraire.

On peut tirer de là une démonstration très-simple de ce théorème que, pour tout cycle fermé réversible, le coefficient économique est plus petit que celui du cycle de Carnot correspondant aux mêmes limites extrêmes de températures.

Soit (*fig.* 2) MNM'N'M ce cycle, et supposons son sens indiqué par la flèche. Circonscrivons à ce cycle deux lignes isothermes AB (T_1) et $A'B'(T_0)$, et aussi deux lignes adiabatiques $BB'b\,(Z_1)$ et $AA'a\,(Z_0)$. Soient M, N, M' et N' les quatre points de contact.

Pendant le parcours MNM′, le corps reçoit du dehors une certaine

Fig. 2.



quantité de chaleur Q_1, et l'on a

$$Q_1 = \text{aire } a\text{MNM}'ba.$$

Pendant le parcours M′N′M, le corps émet au dehors une quantité de chaleur Q_0 et

$$Q_0 = \text{aire } a\text{MN}'\text{M}'ba.$$

La quantité de chaleur disparue ou convertie en travail pendant le parcours du cycle total est

$$Q_1 - Q_0 = \text{aire MNM}'\text{N}'\text{M};$$

d'où ce résultat que, dans ce mode de représentation graphique, l'aire du cycle est égale à la quantité de chaleur convertie en travail.

Soit maintenant ε le coefficient économique. On a

$$\varepsilon = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = \frac{\text{MNM}'\text{N}'\text{M}}{a\text{MNM}'ba}.$$

Ajoutons aux deux termes de cette fraction

$$\text{MANM} + \text{NBM}'\text{N}.$$

Comme $\varepsilon < 1$, il en résulte

$$\varepsilon < \frac{\text{N}'\text{MABM}'\text{N}'}{a\text{AB}ba}.$$

Ajoutons au numérateur seul de cette dernière fraction

$$\text{MA}'\text{N}'\text{M} + \text{N}'\text{M}'\text{B}'\text{N}'.$$

On aura, *à fortiori*,

$$\varepsilon < \frac{A'ABB'A'}{aABba},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varepsilon < \frac{T_1 - T_0}{T_1}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Soit T_e le travail extérieur. On a

$$dT_e = p\,dv, \tag{12}$$

formule identique à l'équation (4), lorsqu'on suppose, dans cette dernière, la quantité de chaleur Q remplacée par T_e; la température absolue T remplacée par la pression p et, enfin, la fonction adiabatique Z remplacée par le volume v.

Concevons donc un cycle fermé quelconque. Soit ρ le rapport du travail extérieur résultant effectué pendant le cycle au travail extérieur, moteur effectué par le corps pendant ce même cycle. Soient p_0 la pression *minima* et p_1 la pression *maxima* du corps pendant le parcours du cycle. En employant le mode de démonstration qui vient d'être appliqué, on verra que

$$\rho < \frac{p_1 - p_0}{p_1}.$$

Ainsi, entre deux pressions limites données p_0 et p_1, le cycle pour lequel ρ est maximum se compose de deux droites (p_0 et p_1), représentant des lignes de pression constante, et de deux droites perpendiculaires (v_0 et v_1), représentant des lignes de volume constant.

RECHERCHES PHYSIOLOGIQUES

SUR LA GERMINATION,

PAR M. PH. VAN TIEGHEM,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

Je me suis proposé de déterminer par l'expérience d'abord le degré de solidarité des divers organes de l'embryon, puis le degré de dépendance de l'embryon tout entier vis-à-vis de l'albumen (¹).

Examinons d'abord le premier de ces points.

I. — *Développement indépendant et régénération des organes de l'embryon.*

Il s'agit de savoir si, pendant l'évolution germinative qui transforme un embryon en une plante complète, les divers organes de cet embryon, sa radicule, sa tigelle, son unique ou ses deux cotylédons, sa gemmule, enfin, sont solidaires, de telle sorte que dissociés ils périssent sans s'accroître, ou si, au contraire, chacun de ces organes, ayant en soi la raison et jusqu'à un certain point les éléments de son évolution, est capable de se développer seul comme lorsqu'il fait partie de l'ensemble. Dans ce dernier cas, il faudra rechercher en outre si chacune des parties de l'embryon, non contente de se développer isolément, peut régénérer les autres pour reformer à elle seule une plante complète, et à quelles conditions cette régénération aura lieu.

(¹) Les principaux résultats de ce travail ont été communiqués à l'Association française pour l'avancement des Sciences, session de Bordeaux, le 6 septembre 1872.

Pour obtenir une réponse à ces questions, j'ai pratiqué sur l'embryon, avant de le soumettre à la germination, des mutilations systématiques, dont je vais indiquer ici les résultats.

1. *Embryon dépourvu d'albumen.* — Je traiterai d'abord le cas où, n'étant pas accompagné d'albumen, l'embryon présente le plus grand développement, et je prendrai, pour plus de précision, un exemple particulier : le Grand-Soleil (*Helianthus annuus*).

Préalablement dépouillé de l'enveloppe ligneuse du fruit et de la fine membrane de la graine, l'embryon du Grand-Soleil mesure en moyenne 7 millimètres, longueur qui se décompose ainsi : radicule, $\frac{1}{2}$ millimètre; tigelle, 1 millimètre; cotylédons, 5 $\frac{1}{2}$ millimètres.

Première expérience. — Sur dix de ces embryons, on sépare par deux sections transversales la radicule de la tigelle, et celle-ci des deux cotylédons, puis on met à germer à une température de 22 à 25 degrés ces dix radicules, ces dix tigelles et ces vingt cotylédons, en plaçant au milieu d'eux sur le même lit d'ouate humide et sous la même cloche deux embryons complets, destinés à servir de témoins.

Après vingt-quatre heures, les radicules qui, au début, avaient à peine $\frac{1}{2}$ millimètre de longueur, se sont développées par voie d'allongement terminal en racines coniques étendues horizontalement sur le lit d'ouate, longues de 8 à 11 millimètres, couvertes de longs poils blancs dans leur moitié la plus âgée, et assez brusquement atténuées. Elles ne portent pas de radicelles, mais sont aussi longues que les pivots plus épais des plantules témoins. Ces racines isolées s'accroissent encore un peu le second jour, puis demeurent stationnaires et finissent par s'altérer et moisir. La structure en est, de tout point, semblable à celle du pivot normal de même âge. Les quatre faisceaux vasculaires lamelliformes et centripètes, ainsi que les quatre groupes alternes de cellules libériennes, y présentent leur aspect ordinaire. A la base de l'organe, quelques divisions commencent même à s'opérer dans les cellules situées entre le bord interne des faisceaux libériens et la croix vasculaire, pour former le début des arcs générateurs. Les méats quadrangulaires creusés dans l'épaisseur de la membrane protectrice dédoublée, et qui sont rapprochés en arc au dos de chaque fais-

ceau libérien, renferment une huile essentielle jaune verdâtre ([1]). En un mot, la racine a acquis, dans son développement solitaire, tous les caractères anatomiques qu'elle revêt quand elle demeure, pendant son évolution, attachée au reste de l'embryon.

Séparées de la radicule et des cotylédons, les tigelles s'allongent aussi dès le lendemain par simple accroissement intercalaire et, après trois jours, elles atteignent 15 à 20 millimètres de longueur; après quoi elles demeurent stationnaires. Elles ont alors la même organisation interne que la tigelle normale; mais ce qu'il y a d'intéressant, c'est que vers le cinquième jour on voit poindre sur la tranche inférieure de la plupart de ces tigelles trois ou quatre petites racines adventives qui s'allongent les jours suivants et peuvent atteindre, en demeurant très-grêles, 20 à 30 millimètres. Ainsi non-seulement la tigelle isolée s'allonge tout d'abord comme celle de l'embryon témoin, mais en outre la radicule enlevée s'y régénère en se multipliant. Des racines adventives peuvent aussi se développer sur la tranche supérieure de la tigelle, et même à la fois sur les deux tranches. Toutefois ces tigelles, ainsi enracinées à la base, au sommet, ou aux deux bouts, n'ont pas tardé à périr, faute de nourriture.

Les cotylédons isolés verdissent progressivement, tout aussi bien que ceux des embryons témoins. Après huit jours, ils sont d'un vert intense. En même temps, ils se sont développés en surface et leur dimension dépasse déjà sensiblement celle des cotylédons témoins. Les jours suivants cette différence va sans cesse augmentant, et, après dix-sept jours de germination, tandis que les cotylédons des plantules témoins ont 10 à 12 millimètres de longueur et 6 à 7 millimètres de largeur, les cotylédons isolés atteignent 19 à 20 millimètres de longueur et 9 à 10 millimètres de largeur. Considérées comme exactement ovales, les surfaces sont dans le rapport de 8 à 20. En outre, ces cotylédons isolés commencent, vers le treizième jour, à former sur leur section inférieure,

---

([1]) C'est même pour m'assurer que l'huile essentielle, renfermée dans les méats oléifères du pivot de l'Hélianthus et des autres Composées, se forme sur place dans cet organe, indépendamment de la tigelle et des cotylédons, et y est sécrétée directement par les cellules dédoublées de la membrane protectrice, que j'ai été tout d'abord conduit à faire germer la radicule indépendamment du reste de l'embryon. Cette expérience m'ayant donné un résultat intéressant, j'en ai varié les conditions, et ainsi s'est développé peu à peu le travail dont je donne ici les principaux résultats.

où ils ont été séparés de la tigelle, plusieurs racines adventives qui, quatre jours après, c'est-à-dire après dix-sept jours de germination, sont très-développées et ramifiées. Ainsi, par exemple, sur un cotylédon qui n'avait formé qu'une seule racine adventive, cette racine atteignait à ce moment 42 millimètres de longueur et portait de nombreuses radicelles elles-mêmes ramifiées. Sur la partie supérieure du bourrelet d'où s'échappent les racines adventives, j'ai vu à plusieurs reprises se former un mamelon verdâtre, premier indice d'un bourgeon adventif, d'une gemmule réparée; mais, ayant dû interrompre l'expérience peu de temps après, je n'ai pas pu suivre le développement ultérieur et fort lent de ce bourgeon. Ainsi les cotylédons privés de tigelle et de radicule se développent et verdissent d'abord comme lorsqu'ils font partie de l'embryon. Mais comme ils gardent pour eux toute la provision de nourriture qu'ils renferment et que, dans l'état normal, ils partagent largement avec la tigelle et la radicule, ils acquièrent bientôt plus de surface et une vigueur plus grande, et non-seulement ils régénèrent la radicule enlevée en la multipliant pour s'enraciner fortement dans le sol, mais encore ils réparent la gemmule et reconstituent par conséquent une plante complète. En d'autres termes, on obtient ainsi des boutures de cotylédons, comme on obtient des boutures de feuilles dans les Gloxinias, les Orangers, les Bégonias, etc. Par ce procédé, chaque graine, chaque embryon de Grand-Soleil donne deux plants; nous verrons tout à l'heure qu'il en peut donner bien davantage.

Voilà comment se comportent les trois organes isolés. On voit déjà par cette première expérience que les trois organes fondamentaux de l'embryon ont en soi la raison de leur propre évolution, et qu'ils peuvent, en effet, se développer, germer indépendamment, avec un intensité et une durée proportionnelles à la provision de matières nutritives assimilables qu'ils possèdent au moment de la séparation. Bien plus, chacun d'eux peut, dans la même proportion, réparer les deux autres et reconstituer une plante complète. Ils ne sont donc pas solidaires en tant qu'organes, mais seulement vis-à-vis de cette réserve alimentaire. Si celle-ci se concentre dans l'un quelconque des trois organes, les deux autres seront solidaires de celui-là, quelle qu'en soit la nature. Si cette réserve est également distribuée, en qualité et en quantité, dans tous les trois, ils auront alors une indépendance complète.

On pourrait donc prévoir ce qui arrivera si, développant cette étude, on n'enlève à l'embryon, dans une seconde expérience, qu'un seul organe à la fois, pour suivre le développement des deux autres demeurés conjoints.

Deuxième expérience. — Cinq embryons, dont on a coupé la radicule, sont mis à germer, à une température de 22 à 25 degrés, à côté de deux embryons entiers servant de témoins. Après cinq jours, la tigelle a atteint 2 centimètres de longueur; les cotylédons sont verts, étalés et plus larges que ceux des témoins qui, en revanche, ont une tigelle longue de 10 centimètres. A la base de la tigelle, sur la plaie provenant de la section de la radicule, se sont développées plusieurs racines adventives, qui, sur certaines plantules, ont 2 centimètres de longueur. Après huit jours, ces racines adventives ont atteint 5 centimètres de longueur, la plantule est maintenant solidement enracinée et sa gemmule commence à se développer.

Ainsi la radicule enlevée se répare, et la jeune plante, dont le développement se trouve un peu retardé par cette ablation, ne paraît pas en souffrir autrement.

Le résultat est le même si, avec la radicule, on coupe une fraction de la tigelle, et même si l'on enlève la tigelle tout entière, en n'en laissant subsister que la partie supérieure où s'insèrent les cotylédons. Une fois les racines adventives développées sous cette tranche, les cotylédons s'écartent et la gemmule s'allonge plus tôt que lorsque la tigelle subsiste, plus tôt aussi que dans les plantules témoins. En ramenant ainsi la plante à avoir ses cotylédons à la surface du sol, en la rendant sessile, si je puis m'exprimer ainsi, on en accélère donc le développement; c'est un moyen assez inattendu d'obtenir des germinations précoces.

On peut, en même temps, ne laisser subsister qu'un seul des cotylédons, ou seulement une moitié de ce cotylédon; l'enracinement, le développement rapide de la gemmule ne s'en opèrent pas moins, bien qu'avec une vigueur proportionnellement réduite. On peut, dans les deux cas, enlever la gemmule; ce sont alors les bourgeons axillaires des deux cotylédons ou celui du cotylédon unique qui se développent et forment la tige. On se trouve ainsi ramené peu à peu à l'enracinement et au bourgeonnement du cotylédon isolé constaté dans la première expérience.

Au lieu de couper la radicule avec ou sans tigelle, détachons les co-

tylédons et soumettons à la germination l'axe seul de l'embryon. Nous verrons s'allonger la radicule par accroissement terminal, la tigelle par accroissement intercalaire, comme lorsque ces deux organes étaient isolés dans notre première expérience. Après six jours, la tigelle atteint 20 millimètres et le pivot 20 à 25 millimètres. Mais les choses en restent là, et, privée de cotylédons, la plantule périt sans développer sa gemmule. Laisse-t-on subsister l'un des cotylédons, ou seulement la moitié ou le tiers d'un cotylédon, la plantule acquiert une vigueur plus grande, proportionnée à la réserve alimentaire qu'on lui conserve, et sa gemmule se développe.

En résumé, le résultat des mutilations partielles que nous avons fait subir à l'embryon dans cette seconde expérience vient confirmer, en les étendant, ceux que la première nous avait donnés.

Troisième expérience. — Allons plus loin maintenant dans notre analyse. Sachant que chacun des organes de l'embryon a une vie propre et la faculté de régénérer les autres, voyons si cette autonomie de développement et cette propriété de régénération ne persisteraient pas dans les divers fragments de chacun de ces organes. Dans ce but, soumettons ces divers fragments à la germination.

Si l'on coupe le petit cone radiculaire en deux dans le sens de l'axe, on voit chaque moitié s'accroître et donner, après deux jours, un demi-pivot d'environ 10 millimètres de longueur. Chaque moitié du cône végétatif de la radicule se comporte donc isolément comme lorsqu'elle est unie à l'autre moitié.

Les tranches horizontales de la tigelle verdissent, s'allongent par voie d'accroissement intercalaire et prennent la forme de tronçons de colonne, qui, placés bout à bout, sont assez loin d'atteindre la longueur qu'acquiert dans les mêmes circonstances une tigelle entière; cela se comprend d'ailleurs aisément. Les tranches longitudinales de la tigelle se développent dans leur plan et atteignent après quelques jours sensiblement la même longueur que la tigelle demeurée entière.

Les fragments de cotylédons, séparés par des sections transversales, verdissent comme les cotylédons tout entiers; ils s'étalent, se développent, et, s'ils ne sont pas trop petits, si l'on n'en a taillé que deux ou trois dans chaque cotylédon, par exemple, ils forment, sur les sections, des racines adventives qui partent des points où les nervures ont été

coupées; dans quelques cas, j'y ai vu des traces de bourgeons adventifs. Les tranches longitudinales des cotylédons se comportent de même.

En un mot, tel fragment qu'on voudra de l'un quelconque des organes de l'embryon germe indépendamment des autres fragments. Il se développe comme lorsqu'il fait partie de l'organe et proportionnellement à la quantité de matière nutritive assimilable et transformable qu'il renferme au moment de sa séparation. S'il en possède une quantité assez grande pour que cette vie dure assez longtemps, et c'est le cas pour un gros fragment de cotylédon, il pourra même régénérer les deux autres organes et reconstituer une plante complète. Un embryon de Grand-Soleil pourra donner ainsi huit plantes, si l'on ne divise qu'en quatre chaque cotylédon.

Quatrième expérience. — Les résultats de cette troisième expérience permettent de prévoir ce qui arrivera si, dans une quatrième série de mutilations, qui sera à la troisième ce que la deuxième est à la première, nous faisons porter nos sections sur l'ensemble de l'embryon, de manière à le diviser suivant sa longueur en fragments complexes, comprenant chacun une partie des trois organes.

Divisons l'embryon en deux par un plan passant par les nervures médianes des cotylédons, de façon que chaque partie entraîne deux moitiés de cotylédon, ou par un plan perpendiculaire qui laisse à chaque partie un cotylédon tout entier. Chacune de ces moitiés d'embryon se comporte, avec moins de vigueur naturellement, comme l'embryon tout entier. La demi-radicule donne d'abord un demi-pivot qui, par une extension du cône terminal, se prolonge bientôt en une racine très-grêle, mais complète. La demi-tigelle s'allonge en un demi-cylindre dont la face plane se cicatrise aisément, et une gemmule, normale, axillaire ou adventive, nourrie par le cotylédon ou par les deux moitiés de cotylédon, ne tarde pas à prendre son essor.

Il en est de même encore si l'on partage l'embryon en quatre par ces deux sections longitudinales à la fois, ou en trois par deux plans parallèles perpendiculaires aux cotylédons. Dans ce dernier cas, la manière dont se comporte la tranche médiane est particulièrement remarquable. Les deux faces se cicatrisent. Le cône terminal inférieur forme un pivot; la tigelle s'allonge autant que dans les plantules témoins et le cône terminal supérieur, la gemmule se développe.

3.

Tous ces résultats viennent confirmer ceux de la troisième expérience.

Je ne quitterai pas cette partie du sujet sans ajouter que beaucoup d'embryons dénudés, provenant de graines dépourvues d'albumen, et appartenant aux familles naturelles les plus diverses, ont été soumis aux mêmes traitements et se sont comportés avec plus ou moins de facilité, comme celui du Grand-Soleil. Je citerai surtout l'embryon des Légumineuses et celui des Cucurbitacées. Les cotylédons du Potiron, par exemple, séparés de la tigelle, qu'ils soient entiers ou coupés en plusieurs fragments, s'enracinent profondément au bout de quelques jours et régénèrent une gemmule. Quand on enlève la radicule et la tigelle, il se forme sous les cotylédons de nombreuses racines adventives; les cotylédons verdissent et s'écartent pour laisser passer aussitôt la gemmule, dont le développement très-vigoureux est ainsi de beaucoup accéléré. On obtient de la sorte de jeunes plants de Courge sans tigelle, sessiles, si l'on peut s'exprimer ainsi, plus précoces et plus vigoureux que les plantules témoins.

Il y a longtemps que, dans le but d'apprécier l'importance des cotylédons, on a pensé à les enlever plus ou moins à l'embryon au moment de la germination. Dans ses *Éléments de Physiologie végétale* (1815), Mirbel est très-explicite à cet égard. « Les cotylédons, dit-il, jouent un grand rôle à la première époque de la vie. Si vous les retranchez dans le Potiron avant ou au moment de la germination, la plantule se fane et meurt; si vous en supprimez la majeure partie, la plante n'a qu'une végétation faible et languissante; mais si vous laissez subsister en entier ces *mamelles végétales*, comme parle Charles Bonnet, vous pouvez impunément couper la radicule et toutes les radicelles qui se développeront durant l'expérience; la tige ne poussera pas avec moins de vigueur que si la jeune plante fût restée intacte. Faites plus : divisez un embryon de Haricot dans sa longueur, de telle sorte que chaque portion emporte avec elle un cotylédon; ces deux moitiés se développeront aussi bien qu'un embryon tout entier, preuve évidente que la blessure occasionnée par la soustraction des lobes séminaux n'est pas ce qui met obstacle à la croissance du blastème. Enfin il suffit d'humecter les cotylédons pour que l'embryon se développe (¹). L'utilité de ces lobes

(¹) Expériences de MM. Vastel, Desfontaines, Thouin et La Billardière.

dans la germination ne saurait donc être révoquée en doute » (p. 71 et 72).

2. *Embryon pourvu d'albumen.* — Considérons maintenant le cas où l'embryon est accompagné d'albumen. Il faudra néanmoins, dans les recherches actuelles, qu'il soit assez développé pour que la distinction de ses diverses parties soit facile et que les mutilations y aient un sens précis. Il faudra encore qu'il soit situé dans la graine extérieurement à l'albumen, de manière qu'on puisse l'atteindre et y opérer les mutilations sans léser cet albumen et sans déranger les rapports qu'ont avec lui les parties de l'embryon qui subsistent. Parmi les plantes qui remplissent ces conditions, celles qui m'ont donné les résultats les plus satisfaisants sont la Belle-de-Nuit (*Mirabilis Jalapa*) et les Graminées, notamment le Maïs (*Zea Maïs*).

Sur dix embryons de Belle-de-Nuit préalablement dénudés, c'est-à-dire dépouillés non-seulement de l'involucre ligneux, mais encore des fines membranes du fruit et de la graine, séparons par deux sections transversales la radicule et les cotylédons, ces derniers enfermant dans leur concavité l'albumen farineux avec lequel l'un d'eux seulement est en contact. J'appellerai celui-ci cotylédon interne, l'autre cotylédon externe. Mettons à germer ces dix radicules, ces dix tigelles, ces dix paires de cotylédons albuminés, sur le même lit de mousse humide, à une température de 22 à 25 degrés, à côté de cinq embryons pareillement dénudés, mais entiers, qui nous serviront de témoins.

Après quarante-huit heures, les radicules sont en voie d'allongement et les jeunes pivots se couvrent de poils. Après cinq jours, ces pivots, rapidement amincis, ont 12 à 15 millimètres de longueur et portent de courtes radicelles. Ils ont, d'ailleurs, la même organisation interne que ceux des plantes témoins qui sont à cette heure beaucoup plus longs et plus épais. Les jours suivants ils ne s'allongent plus et moisissent. Si l'on ne coupe que le sommet de la radicule, en laissant sa base adhérente à la tigelle, on voit cette base s'allonger notablement (5 millimètres environ) et se couvrir de poils et de jeunes radicelles. Il s'opère donc dans la racine, au moins dans le voisinage de la base, un certain accroissement intercalaire.

Les tigelles isolées s'allongent de même, verdissent, et, au bout de

cinq jours, elles atteignent 15 millimètres environ, la même longueur que les pivots. Quelques mamelons radicellaires se forment sur leur tranche inférieure ; mais les jours suivants, ces racines adventives ne se développent pas et les tigelles périssent.

Les cotylédons, séparés de la tigelle au-dessus de leur point d'insertion, commencent à verdir vers le cinquième jour, et l'action se continue lentement les jours suivants. Au bout de seize jours, ils sont d'un vert intense et plus larges que les cotylédons des plantes témoins, dont la gemmule a déjà, à cette époque, développé un entre-nœud de 4 à 5 centimètres. Ce plus grand développement des cotylédons s'explique, puisqu'ils gardent pour eux toute la matière nutritive que leur fournit l'albumen. Ils sont d'ailleurs inégalement développés ; le cotylédon interne est plus large que l'autre, et cette différence se conçoit aisément, puisque c'est lui qui absorbe directement l'albumen. Toutefois, le grand développement du cotylédon externe, la différence assez faible qu'il y a entre ces deux feuilles portent à croire que le cotylédon absorbant a transmis à son congénère une partie de la substance de l'albumen, et cette transmission ne peut avoir lieu que par les deux épidermes supérieurs en contact. Pour s'en assurer, que l'on détruise l'adhérence des deux surfaces en laissant les cotylédons aussi rapprochés que possible, le cotylédon externe verdira bien encore, mais il se développera beaucoup moins. Cette transmission par contact mérite d'ailleurs de nouvelles recherches, et je ne puis que la signaler ici. A la base des pétioles cotylédonaires, au cotylédon interne, notamment, il s'est formé quelques courtes racines adventives qui s'allongent les jours suivants; mais je n'ai pas prolongé l'expérience assez longtemps pour obtenir une gemmule adventive (1).

Ainsi les trois organes de l'embryon de Belle-de-Nuit se développent isolément comme ceux de l'embryon du Grand-Soleil, et nul doute que, dans les mêmes conditions de nutrition, chacun d'eux ne puisse réparer les deux autres.

On peut donc aisément prévoir ce qui arrive quand on n'enlève à l'embryon que l'un des trois organes à la fois. Se borne-t-on, par exemple,

---

(1) Un fragment quelconque du cotylédon interne, demeuré adhérent à la surface de l'albumen, verdit, s'étale, et quelquefois même s'enracine, comme le cotylédon tout entier.

à couper la radicule, la tigelle s'allonge et produit à sa base, après six ou sept jours, plusieurs racines adventives; tout se passe ensuite comme à l'ordinaire. Il en est de même si, avec la radicule, on onlève une fraction plus ou moins grande de la tigelle, ou même la tigelle tout entière, sauf la tranche supérieure qui réunit les deux cotylédons; dans ce dernier cas, la plante est sessile et le développement de sa gemmule et des bourgeons cotylédonaires est très-précoce. On peut, en outre, sans nuire sensiblement à la plantule, détacher le cotylédon externe. Si l'on enlève à la fois les deux cotylédons, et, par conséquent, l'albumen qu'ils renferment, l'embryon, réduit à son axe, s'allonge d'abord comme à l'ordinaire. Après cinq jours, cet axe atteint 30, 35 et 40 millimètres, longueur qui se divise à peu près également entre le pivot et la tigelle; mais les jours suivants le développement s'arrête : privée de cotylédons, la plantule périt. Pourtant j'ai vu plusieursfois son développement se prolonger avec une assez grande vigueur jusqu'au début de l'allongement de la gemmule : c'est lorsque je réussissais à enlever les cotylédons en laissant l'albumen adhérent à la partie supérieure de la tigelle et quand cette adhérence se maintenait dans la suite. Nul doute que l'épiderme de la partie supérieure de la tigelle n'absorbât alors l'albumen, comme l'épiderme inférieur du cotylédon interne l'absorbe dans les conditions ordinaires.

Des résultats analogues s'obtiennent avec le Maïs; je n'en citerai qu'un seul. Enlevons à un embryon de Maïs sa radicule et sa gemmule, c'est-à-dire toute la partie de l'axe située au-dessous et au-dessus de l'insertion de l'écusson. Ce dernier, on le sait, constitue la partie médiane, le limbe du cotylédon, dont la coiffe conique de la gemmule est la gaîne bistipulaire. Ainsi réduit à son limbe cotylédonaire appliqué contre l'albumen et à la tranche de tigelle où ce cotylédon s'insère, l'embryon développe, après deux jours, de nombreuses racines adventives sur les deux sections de la tranche. Au bout de douze jours, ces racines adventives sont très-puissamment ramifiées et forment dans la mousse un réseau inextricable. Après vingt et un jours, ce réseau s'est beaucoup développé, et il est beaucoup plus puissant que le faisceau de racines formé dans le même temps sur les plantes complètes qui servent de témoins, résultat qui s'explique, puisque toute la réserve nutritive de l'albumen est consacrée ici à la formation des racines. Les

jours suivants, et tant que l'albumen n'est pas totalement absorbé, ce développement de racines continue sans qu'il apparaisse le moindre grain de chlorophylle dans l'écusson, sans que cet organe prenne la moindre extension, sans qu'il se forme de gemmules adventives. On obtient ainsi des plants de Maïs, âgés de plus d'un mois, entièrement dépourvus de tiges et de feuilles, réduits à un magnifique système de racines en pleine voie d'allongement.

Quand j'ai isolé entièrement l'écusson sans laisser subsister une tranche de tigelle, je n'ai pas obtenu de racines adventives et la graine a moisi.

Si l'on enlève la gemmule de l'Orge ou de l'Avoine, par exemple, en laissant subsister la partie inférieure de la piléole et, par conséquent, le bourgeon cotylédonaire simple ou double qu'elle porte à son aisselle, l'enracinement a lieu de la même manière; mais il est bientôt suivi du développement de ce bourgeon cotylédonaire simple ou double, qui répare la gemmule et complète la plante.

En résumé, qu'il n'y ait pas d'albumen ou qu'il y en ait un, l'embryon répond essentiellement de la même manière aux diverses mutilations qu'on lui fait subir, et la conclusion la plus générale des expériences dont j'ai rendu compte dans cette première partie de mon travail, c'est qu'on doit étendre à l'embryon deux propriétés bien connues dans le végétal adulte et qui y sont la source d'innombrables applications, je veux dire : 1° l'autonomie de développement des trois organes fondamentaux, l'un par rapport à l'autre, ainsi que des divers systèmes élémentaires dans chacun de ces organes fondamentaux; 2° la régénération possible de deux quelconques des trois organes fondamentaux au moyen du troisième. C'est même, semble-t-il, dans l'embryon que cette indépendance de développement et cette activité réparatrice se manifestent avec le plus d'énergie.

II. — *Degré de dépendance de l'embryon vis-à-vis de l'albumen.*

Considérons maintenant l'embryon tout entier dans ses rapports avec l'albumen, pour savoir jusqu'à quel point cet albumen est nécessaire au développement de l'embryon et s'il est possible de le remplacer par une autre matière nutritive convenablement préparée.

Pour sujet d'expériences comparatives, j'ai choisi encore la Belle-de-Nuit. Après avoir dénudé la graine de cette plante, on arrive, en effet, facilement, avec un peu d'habitude, à séparer sans lésion aucune l'embryon de l'albumen; en outre, le reploiement des cotylédons en forme de sac s'y prête bien à l'introduction de matières nutritives étrangères à l'état pâteux et au moulage de cette pâte sur la surface interne de la cavité.

Première expérience. — Précisons d'abord l'influence de l'albumen sur le développement de l'embryon.

Sur un lit de mousse humide placé sous cloche à une température de 22 à 25 degrés, disposons dix graines dénudées, c'est-à-dire dix embryons pourvus de leur albumen, et dix autres embryons d'où l'on a complétement extrait ce tissu nutritif. Après deux jours les plantules sont assez profondément enracinées, les cotylédons verdissent, les tigelles commencent à s'allonger. Après quatre jours, les tigelles ont 20 à 25 millimètres de hauteur. Jusque-là aucune différence entre les deux espèces d'embryons. Au bout de six jours, une petite inégalité se manifeste : les plantules albuminées ont 40 à 45 millimètres de hauteur, les autres 30 à 35 millimètres seulement; des deux parts, la gemmule ne s'est pas encore développée. Après onze jours, les plantules albuminées ont 60 millimètres de tigelle, leurs cotylédons longuement pétiolés ont 30 millimètres de longueur; la gemmule a développé un premier entre-nœud long de 35 millimètres environ, et elle continue à s'allonger les jours suivants. Les plantules sans albumen ont 40 à 45 millimètres, quelques-unes même 50 millimètres de tigelle; leurs cotylédons verts et étalés n'ont que 10 millimètres de longueur; mais surtout la gemmule n'a pas commencé à se développer; les jours suivants, la plante reste stationnaire et, dans les conditions où elle est placée, elle ne tarde pas à périr.

Ainsi l'embryon sans albumen se développe pendant les premiers jours, comme s'il en possédait un; il forme une plantule munie d'un pivot, d'une tigelle et de deux feuilles vertes, et presque aussi vigoureuses en apparence, mais il ne développe pas sa gemmule. C'est donc par le développement de la gemmule que se traduit principalement au dehors l'influence de l'albumen sur l'embryon de la Belle-de-Nuit.

Ceci posé, cherchons à obtenir le même effet en substituant à l'albumen une autre matière nutritive convenablement préparée.

Mais, pour nous guider dans ce nouveau genre d'essais, il est nécessaire que nous sachions, avant toute chose, si le pouvoir nutritif de l'albumen est ou non lié nécessairement à son organisation cellulaire, en d'autres termes, s'il est ou non indispensable que la matière nutritive que nous lui substituerons soit contenue dans les cellules d'un tissu. L'expérience suivante répond à cette question préalable.

Deuxième expérience. — A dix embryons de Belle-de-Nuit on enlève l'albumen et on le remplace aussitôt par une boulette de même forme et de même dimension, obtenue en triturant avec quelques gouttes d'eau les masses albumineuses que l'on vient d'extraire. Dans cet albumen artificiel, toute organisation cellulaire est détruite, sans que la proportion des principes immédiats y ait été changée. La pelote une fois introduite entre la tigelle et les cotylédons, on a soin d'exercer avec les doigts une pression légère et uniforme, de manière à la mouler pour ainsi dire dans la cavité cotylédonaire et à établir un contact intime entre elle et l'épiderme inférieur du cotylédon interne.

Ainsi empâtés, ces dix embryons sont mis à germer sur un lit de mousse humide à côté de cinq embryons simplement séparés de leur albumen, et de deux autres embryons qui l'ont conservé. Après cinq jours de germination, on voit que la pâte albumineuse a moisi sur trois des plantules empâtées qui se sont fort peu développées; les sept autres, qu'il faut seules considérer, sont vigoureusement enracinées: les tigelles ont 25 millimètres de hauteur et les cotylédons ont verdi. Les embryons non empâtés se sont bien développés aussi, et leurs tigelles ont 20 à 25 millimètres. Il n'y a entre les deux lots qu'une différence très-légère, mais elle est à l'avantage des embryons empâtés; d'ailleurs, comme nous le savons déjà, les deux embryons pourvus d'albumen normal n'ont guère eux-mêmes à cette époque une vigueur plus grande. Après douze jours, la différence est prononcée. Les plantules empâtées ont 60 millimètres de hauteur de tigelle, leurs cotylédons longuement pétiolés atteignent environ 25 millimètres, et leur gemmule qui commence à se développer a acquis 20 millimètres de longueur. Les plantules non empâtées n'ont que 35 millimètres de tigelle, leurs cotylédons ont environ 15 millimètres et leur gemmule ne s'est pas allongée. Par contre, les embryons munis d'albumen ont 70 millimètres de tigelle, et leur gemmule a fourni un premier entre-nœud de plus de 40 millimètres.

Il y a donc eu absorption sensible de la pâte albumineuse fournie à l'embryon; mais l'effet nutritif de cette pâte est inférieur à celui de l'albumen normal, ce qui peut s'expliquer par l'imperfection du contact établi et par un commencement de développement d'êtres microscopiques, infusoires ou moisissures.

Ainsi l'absorption de l'albumen par l'embryon et son pouvoir nutritif ne sont pas nécessairement liés à son organisation cellulaire; seulement cette organisation protége efficacement les principes nutritifs jusqu'au moment même de leur emploi, c'est-à-dire de leur absorption par le cotylédon, contre l'action destructive des êtres microscopiques venus du dehors. Nous pouvons donc désormais, dans nos essais ultérieurs, substituer au tissu albumineux une pâte molle convenablement préparée; mais cette première expérience nous montre quelle espèce d'ennemis nous aurons à combattre et de quel genre de précautions nous devrons nous entourer, en même temps qu'elle nous fait entrevoir par avance la cause des échecs qui ne manqueront pas de venir parfois ruiner nos espérances.

Troisième expérience. — Essayons d'abord une pâte simple formée de fécule de pomme de terre mouillée d'eau distillée.

Dix embryons, ainsi empâtés, sont mis à germer sur un même lit de mousse humide, à côté de cinq embryons isolés et de cinq embryons albuminés. Après cinq jours, les plantules empâtées ont 22 millimètres de tigelle, leurs cotylédons sont verts, mais encore bien appliqués l'un contre l'autre; l'une d'elles seulement, où la pâte de fécule a coulé le long de la tigelle, n'a que 15 millimètres. Les plantules non empâtées ont environ 20 millimètres de tigelle, à peine moins, mais cependant un peu moins développées que les précédentes. Après douze jours, les plantules empâtées ont 35 millimètres de tigelle, mais n'ont pas développé leur gemmule. Les plantules non empâtées n'ont que 25 millimètres environ. Les plantules albuminées ont plus de 50 millimètres de tigelle et la gemmule y est en plein développement.

Si j'étudie d'ailleurs au microscope la fécule qui demeure adhérente au cotylédon, je vois que dans la partie qui touche l'épiderme cotylédonaire les grains sont rongés, perforés par place, tandis que dans le reste de la masse ils demeurent parfaitement intacts.

Ainsi donc la fécule de pomme de terre a produit un léger effet nu-

tritif sur la plantule de Belle-de-Nuit, et elle a été en partie dissoute et absorbée par le cotylédon. Cet effet est petit, sans doute, et ne va pas, dans nos expériences du moins, jusqu'à faire développer la gemmule; mais nous ne saurions nous en étonner. Des quatre espèces de principes immédiats que renferme l'albumen de la Belle-de-Nuit, l'amidon, les matières grasses, les matières azotées et les sels, notamment les phosphates, nous n'en avons présenté à notre plante qu'une seule, l'amidon, et, bien que ce principe y prédomine de beaucoup sur les trois autres, ces derniers ne peuvent cependant pas être négligés.

Ce résultat est toutefois en lui-même très-intéressant si l'on réfléchit à la nature et à l'origine on ne peut plus différentes des grains d'amidon de la Belle-de-Nuit et de la Pomme de terre. Les premiers sont les plus petits grains qui se puissent voir, ayant environ $0^{mm},001$; les autres comptent au contraire parmi les plus gros et atteignent jusqu'à $0^{mm},185$, près de 200 fois la taille des premiers, avec une constitution beaucoup plus complexe. Les premiers naissent dans un tissu nouveau produit à l'intérieur du sac embryonnaire, les autres dans le parenchyme des rameaux souterrains. Cette différence de taille et de constitution, cette diversité d'origine, n'empêchent donc pas les grains d'être attaqués par le même liquide diastasique et de pouvoir se substituer jusqu'à un certain point l'un à l'autre dans la nutrition de la plante.

Quatrième expérience. — Offrons maintenant à notre embryon de Belle-de-Nuit un aliment, étranger encore, mais complet, condition que nous pouvons réaliser de deux manières, soit en ajoutant à la fécule de pomme de terre des nitrates et des phosphates, soit en triturant et réduisant en pâte l'albumen farineux d'une autre plante, du Sarrasin, par exemple, ou du Froment.

Les embryons de Belle-de-Nuit, empâtés avec une pelote de pâte ferme, composée de fécule de pomme de terre délayée avec une solution saline contenant principalement des nitrates et des phosphates en diverses proportions, ont constamment poursuivi leur développement sensiblement plus loin qu'avec de la fécule délayée dans l'eau distillée. Plusieurs fois même j'ai réussi à obtenir ainsi le début du développement de la gemmule.

Empâtés avec de la farine de Sarrasin (*Polygonum Fagopyrum*) et mis à germer sur de la mousse humide, à une température de 22 à

25 degrés, à côté de cinq embryons exalbuminés et de cinq autres embryons albuminés, dix embryons de Belle-de-Nuit ont présenté, au bout de sept jours, une végétation remarquable. Deux plantules, dont la pâte, attaquée par des moisissures, avait noirci, ne se sont pas développées; mais les huit autres ont actuellement une vigueur plus grande que les plantules exalbuminées qui servent de témoins. Leur tigelle a 30 à 35 millimètres de hauteur, tandis que la tigelle des autres atteint à peine 25 millimètres. Mais les plantules albuminées sont plus vigoureuses encore et ont 38 à 45 millimètres de tigelle. Les trois lots s'échelonnent donc régulièrement.

L'examen microscopique montre d'ailleurs que les grains d'amidon de la farine de Sarrasin sont, au voisinage de l'épiderme cotylédonaire, corrodés à l'intérieur, creusés d'anfractuosités irrégulières, chagrinés, en un mot, en partie détruits, tandis qu'ils sont intacts dans le reste de la masse où vivent, circonstance évidemment défavorable, de nombreux infusoires : bactéries, monades, paramécies, etc.

Enfin, après douze jours, la différence de végétation des trois lots est encore plus marquée et dans le même sens. Les plantules exalbuminées ont 30 millimètres de tigelle, leurs cotylédons ont 10 millimètres de longueur, pas de gemmule. Les huit plantules empâtées sont un peu inégales, ce qui paraît tenir à un moisissement partiel de la pâte sur les plus courtes; mais le plus grand nombre a 50 millimètres de tigelle; les cotylédons ont 20 millimètres de longueur, moitié pour le pétiole, moitié pour le limbe ; la gemmule, s'allongeant en une tige grêle, a 20 millimètres de longueur. Les plantules albuminées enfin ont 60 millimètres de tigelle, des cotylédons de 30 millimètres, ayant le pétiole long de 20 millimètres, enfin 40 millimètres de tige provenant du premier entre-nœud de la gemmule. Les jours suivants, ces dernières continuent à gagner, tandis que les premières sont stationnaires depuis longtemps, et que les secondes s'arrêtent à cet état.

Ainsi la pâte de farine de Sarrasin peut, jusqu'à un certain point, remplacer l'albumen normal de la Belle-de-Nuit dans la nutrition de la jeune plante; du moins obtient-on avec elle des résultats équivalents à ceux que donne l'albumen propre de la plante quand on le réduit en pâte, c'est-à-dire quand on le ramène aux mêmes conditions expérimentales, conditions défavorables à l'assimilation directe, éminem-

ment favorables, au contraire, au développement des êtres microscopiques.

Pour la farine de Froment, ce développement, celui des moisissures surtout, et notamment du *Mucor stolonifer*, est si rapide, que, jusqu'à présent, tous mes essais ont échoué. Les embryons ainsi empâtés ne se développent presque pas; l'albumen artificiel leur nuit et les empêche de parvenir à l'état relativement florissant où ils ne manquent pas d'arriver quand on les livre à leurs propres ressources.

En résumé, les expériences dont les résultats sont exposés dans la seconde partie de ce travail permettent de formuler les conclusions suivantes :

L'embryon de la Belle-de-Nuit (et l'on trouverait sans doute bien d'autres plantes qui se comporteraient de la même manière) peut se développer en une jeune plante verte sans le concours de l'albumen. L'influence de l'albumen ne se manifeste que plus tard et se traduit par le développement de la gemmule. Le tissu nutritif désigné par ce nom peut être remplacé jusqu'à un certain point, en tenant compte des causes d'échec introduites par les manipulations, par une pâte formée de sa propre substance, ou par une pâte provenant d'un albumen étranger de nature chimique analogue, ou encore, quoique à un moindre degré, par une pâte ne renfermant que le seul principe immédiat qui domine en lui, c'est-à-dire par une pâte d'amidon, dont on améliore l'effet en y ajoutant des nitrates et des phosphates minéraux [1].

---

[1] Je ne terminerai pas cette seconde partie de mon travail sans rappeler que l'on doit à M. Arthur Gris, dont la mort prématurée vient d'attrister tous les amis de la science, une première tentative pour obtenir un commencement de germination dans l'embryon séparé de son albumen. Il opérait sur l'embryon du Balisier, et dans le but de savoir si l'amidon se développe sur place dans cet embryon indépendamment de l'action de l'albumen farineux qui l'entoure. Il s'est assuré qu'après vingt-quatre heures environ de séjour dans les lacunes d'une éponge fine légèrement mouillée, et sous l'influence d'une douce chaleur, l'embryon isolé acquiert un abondant dépôt d'amidon dans le parenchyme cotylédonaire qui n'en contenait que des traces avant l'expérience. Dès lors, la question spéciale que l'auteur s'était posée se trouvait résolue, et l'expérience n'était pas poursuivie plus loin. [A. Gris, *Recherches sur la germination*. Mémoire couronné. (*Annales des Sciences naturelles*, 5e série, t. II, 1864, tirage à part, p. 107.)]

NOTE

SUR UNE

FORMULE DE CALCUL INTÉGRAL,

PAR M. F. DIDON,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

I.

Dans le cas où $f(t)$, fonction bien déterminée de la variable imaginaire t, a, pour tout point d'un contour fermé T, une valeur différente de zéro et de l'infini, on sait que l'intégrale $\int \frac{f'(t)\,dt}{f(t)}$, étendue à tout ce contour, est égale au produit de $2\pi\sqrt{-1}$ par un nombre entier p.

Je vais démontrer, dans ce paragraphe, la proposition plus générale suivante :

« Si Δ désigne le déterminant fonctionnel de n fonctions bien déterminées $f(t, u, v,\ldots)$, $\varphi(t, u, v,\ldots)$, $\psi(t, u, v,\ldots)\ldots$ à n variables imaginaires $t, u, v,\ldots$, et s'il n'existe aucun système de points $t, u, v,\ldots$, pris le premier sur un contour fermé T, le deuxième sur un contour fermé U, le troisième sur un contour fermé V, etc., susceptible d'annuler ou de rendre infinie l'une quelconque des fonctions $f, \varphi, \psi,\ldots$, l'intégrale multiple d'ordre n,

$$\iiint \frac{\Delta}{f(t, u, v,\ldots)\,\varphi(t, u, v,\ldots)\,\psi(t, u, v,\ldots)\ldots}\,dt\,du\,dv,\ldots,$$

dans laquelle on fait parcourir à t tout le contour T, à u tout le contour U, etc., aura une valeur de la forme $(2\pi\sqrt{-1})^n p$, p représentant encore un nombre entier. »

Je commencerai par prendre le cas de deux variables qui conduit à l'intégrale double

$$\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u} - \frac{\partial f(t,u)}{\partial u}\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)\,\varphi(t,u)}\,dt\,du,$$

différence des deux suivantes :

$$\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)}\,dt\,du,\qquad \int\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}}{f(t,u)}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{\varphi(t,u)}\,dt\,du.$$

J'observe tout d'abord que l'identité

$$\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)} = \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}}{f(t,u)}$$

permet de regarder $\frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)}$ et $\frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}}{f(t,u)}$ comme les dérivées partielles relatives à t et à u, d'une même fonction $F(t,u)$. Ces dérivées ne devant être envisagées que le long de contours où elles sont finies et continues, je supposerai que $F(t,u)$ soit une fonction continue de t et de u. On voit ainsi que $F(t,u)$ n'est autre chose que l'une quelconque des déterminations de $\log f(t,u)$, que l'on rend continue par l'addition à certains moments critiques des constantes convenables. Cela dit, j'arrive au calcul de l'intégrale

$$\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)}\,dt\,du.$$

En donnant à u une valeur déterminée se rapportant à un point quelconque du contour U, on est conduit à évaluer l'intégrale simple

$$\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)}\,dt,$$

qu'on étendra à tout le contour T, en partant d'un point quelconque t_1

et s'en éloignant sur le contour, toujours dans le même sens, jusqu'à ce qu'on y soit revenu. Si l'on considère la portion de l'intégrale qui correspond à un arc variable du contour, compris entre le point t_1 et le point t, on aura, grâce à une intégration par parties,

$$\int_{t_1}^{t} \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} dt = \left[\mathrm{F}(t,u) \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} \right]_{t_1}^{t} - \int_{t_1}^{t} \mathrm{F}(t,u) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} dt,$$

et, quand t atteindra de nouveau la valeur t_1, on obtiendra l'intégrale simple que l'on cherche. Mais, d'une part, $\dfrac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)}$ n'a qu'une valeur pour $t = t_1$; d'autre part, $\mathrm{F}(t,u)$ s'accroît, quand le point t a parcouru le contour T, de l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)} dt$, étendue à tout ce contour; de sorte qu'en remarquant que la valeur de cette dernière intégrale ne dépend que du nombre des racines t des équations

$$f(t,u) = 0, \quad f(t,u) = \infty$$

qui se trouvent enfermées par le contour T, que, de plus, ces racines, quand u varie le long de U, décrivent des courbes qui sont toujours situées à l'intérieur de T, puisque, si elles traversaient ce contour, on aurait

$$f(t,u) = 0 \quad \text{ou} \quad f(t,u) = \infty,$$

pour un système de points t, u, pris respectivement sur T et U, ce qui est contraire à notre hypothèse, et que dès lors le nombre de ces racines est constant, tant que u est sur U, on voit bien que la variation de $\mathrm{F}(t,u)$ peut être représentée par $\displaystyle\int \frac{\frac{df(t,u_1)}{dt}}{f(t,u_1)} dt$, u_1 étant un point déterminé du contour U. Par conséquent

$$\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} dt = \frac{\frac{d\varphi(t_1,u)}{du}}{\varphi(t_1,u)} \int \frac{\frac{df(t,u_1)}{dt}}{f(t,u_1)} dt - \int \mathrm{F}(t,u) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} dt,$$

et

$$\iint \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} dt\,du$$

$$= \int \frac{\frac{df(t,u_1)}{dt}}{f(t,u_1)} dt \int \frac{\frac{d\varphi(t_1,u)}{du}}{\varphi(t_1,u)} du - \iint \mathrm{F}(t,u) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} dt\,du.$$

On trouve de même

$$\iint \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}}{f(t,u)} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{\varphi(t,u)} dt\,du$$

$$= \int \frac{\frac{df(t_1,u)}{du}}{f(t_1,u)} du \int \frac{\frac{d\varphi(t,u_1)}{dt}}{\varphi(t,u_1)} dt - \iint \mathrm{F}(t,u) \frac{\partial}{\partial u} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{\varphi(t,u)} dt\,du.$$

Mais

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{\varphi(t,u)}.$$

Donc, en définitive,

$$\iint \begin{vmatrix} \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)} & \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{\varphi(t,u)} \\ \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}}{f(t,u)} & \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} \end{vmatrix} dt\,du = \begin{vmatrix} \int \frac{\frac{df(t,u_1)}{dt}}{f(t,u_1)} dt & \int \frac{\frac{d\varphi(t,u_1)}{dt}}{\varphi(t,u_1)} dt \\ \int \frac{\frac{df(t_1,u)}{du}}{f(t_1,u)} du & \int \frac{\frac{d\varphi(t_1,u)}{du}}{\varphi(t_1,u)} du \end{vmatrix};$$

ce qui démontre la proposition énoncée dans le cas de $n = 2$, puisque chacun des éléments du dernier déterminant est de la forme $2\pi\sqrt{-1}\,p$, p étant un nombre entier. Pour prouver généralement le théorème, on fera voir que, s'il est vrai pour $n = m - 1$, il l'est encore pour $n = m$. Afin d'abréger l'écriture, je vais passer du cas de $n = 2$ au cas de $n = 3$; le raisonnement que j'emploierai devrait être reproduit presque identiquement, si l'on voulait passer de $n = m - 1$ à $n = m$. Soit donc à

calculer

$$\int\int\int \begin{vmatrix} \dfrac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial t}}{f(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial t}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial t}}{\psi(t,u,v)} \\ \dfrac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial u}}{f(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial u}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial u}}{\psi(t,u,v)} \\ \dfrac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial v}}{f(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial v}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial v}}{\psi(t,u,v)} \end{vmatrix} dt\,du\,dv.$$

Si l'on pose

$$A(t,u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial u}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial u}}{\psi(t,u,v)} \\ \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial v}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial v}}{\psi(t,u,v)} \end{vmatrix},$$

$$B(t,u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial v}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial v}}{\psi(t,u,v)} \\ \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial t}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial t}}{\psi(t,u,v)} \end{vmatrix},$$

$$C(t,u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial t}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial t}}{\psi(t,u,v)} \\ \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial u}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial u}}{\psi(t,u,v)} \end{vmatrix},$$

cette intégrale peut être mise sous la forme

$$\int\int\int \frac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial t}}{f(t,u,v)} A(t,u,v)\,dt\,du\,dv$$
$$+\int\int\int \frac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial u}}{f(t,u,v)} B(t,u,v)\,dt\,du\,dv + \int\int\int \frac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial v}}{f(t,u,v)} C(t,u,v)\,dt\,du\,dv.$$

Soit F (t, u, v) une fonction continue de t, u, v, ayant pour dérivées partielles relatives à t, u, v les fonctions respectives

$$\frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial t}}{f(t,u,v)},\quad \frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial u}}{f(t,u,v)},\quad \frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial v}}{f(t,u,v)}.$$

On verra, comme plus haut, qu'on peut écrire

$$\int\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial t}}{f(t,u,v)} \mathrm{A}(t,u,v)\,dt\,du\,dv$$
$$= \int \frac{\frac{df(t,u_1,v_1)}{dt}}{f(t,u_1,v_1)}\,dt \int\int \mathrm{A}(t_1,u,v)\,du\,dv - \int\int\int \mathrm{F}(t,u,v)\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{A}(t,u,v)\,dt\,du\,dv,$$

$$\int\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial u}}{f(t,u,v)} \mathrm{B}(t,u,v)\,dt\,du\,dv$$
$$= \int \frac{\frac{df(t_1,u,v_1)}{du}}{f(t_1,u,v_1)}\,du \int\int \mathrm{B}(t,u_1,v)\,dt\,dv - \int\int\int \mathrm{F}(t,u,v)\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{B}(t,u,v)\,dt\,du\,dv,$$

$$\int\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial v}}{f(t,u,v)} \mathrm{C}(t,u,v)\,dt\,du\,dv$$
$$= \int \frac{\frac{df(t_1,u_1,v)}{dv}}{f(t_1,u_1,v)}\,dv \int\int \mathrm{C}(t,u,v_1)\,dt\,du - \int\int\int \mathrm{F}(t,u,v)\frac{\partial}{\partial v}\mathrm{C}(t,u,v)\,dt\,du\,dv,$$

t_1, u_1 et v_1 étant trois points arbitraires pris respectivement sur les contours T, U et V. Mais, d'après ce qui a été établi pour $n = 2$, on a

$$\int\int \mathrm{A}(t_1,u,v)\,du\,dv = \begin{vmatrix} \int \frac{\frac{d\varphi(t_1,u,v_1)}{du}}{\varphi(t_1,u,v_1)}\,du & \int \frac{\frac{d\psi(t_1,u,v_1)}{du}}{\psi(t_1,u,v_1)}\,du \\ \int \frac{\frac{d\varphi(t_1,u_1,v)}{dv}}{\varphi(t_1,u_1,v)}\,dv & \int \frac{\frac{d\psi(t_1,u_1,v)}{dv}}{\psi(t_1,u_1,v)}\,dv \end{vmatrix},$$

$$\int\!\!\int \mathrm{B}(t, u_1, v)\, dt\, du\, dv = \begin{vmatrix} \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t_1, u_1, v)}{dv}}{\varphi(t_1, u_1, v)}\, dv & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t_1, u_1, v)}{dv}}{\psi(t_1, u_1, v)}\, dv \\ \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\varphi(t, u_1, v_1)}\, dt & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\psi(t, u_1, v_1)}\, dt \end{vmatrix},$$

$$\int\!\!\int \mathrm{C}(t, u, v_1)\, dt\, du = \begin{vmatrix} \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\varphi(t, u_1, v_1)}\, dt & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\psi(t, u_1, v_1)}\, dt \\ \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t_1, u, v_1)}{du}}{\varphi(t_1, u, v_1)}\, du & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t_1, u, v_1)}{du}}{\psi(t_1, u, v_1)}\, du \end{vmatrix},$$

de plus, comme on le vérifie immédiatement,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{A}(t, u, v) + \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{B}(t, u, v) + \frac{\partial}{\partial v}\mathrm{C}(t, u, v) = 0.$$

Donc l'intégrale triple que nous cherchions à calculer peut être représentée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \displaystyle\int \frac{\frac{df(t, u_1, v_1)}{dt}}{f(t, u_1, v_1)}\, dt & \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\varphi(t, u_1, v_1)}\, dt & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\psi(t, u_1, v_1)}\, dt \\ \displaystyle\int \frac{\frac{df(t_1, u, v_1)}{du}}{f(t_1, u, v_1)}\, du & \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t_1, u, v_1)}{du}}{\varphi(t_1, u, v_1)}\, du & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t_1, u, v_1)}{du}}{\psi(t_1, u, v_1)}\, du \\ \displaystyle\int \frac{\frac{df(t_1, u_1, v)}{dv}}{f(t_1, u_1, v)}\, dv & \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t_1, u_1, v)}{dv}}{\varphi(t_1, u_1, v)}\, dv & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t_1, u_1, v)}{dv}}{\psi(t_1, u, v_1)}\, dv \end{vmatrix},$$

et par conséquent, d'après ce qu'on sait sur les intégrales simples qui constituent les éléments de ce déterminant, sa valeur est de la forme $(2\pi\sqrt{1})^3 p$, p étant un nombre entier.

II.

Supposons maintenant que les fonctions $f(t, u, v, \ldots)$, $\varphi(t, u, v, \ldots)$, $\psi(t, u, v, \ldots)$, ... soient algébriques, rationnelles et entières. Dans ce

cas, si l'on considère le système des équations $f(t, u, v, \ldots) = 0$, $\varphi(t, u, v, \ldots) = 0$, $\psi(t, u, v, \ldots) = 0, \ldots$, on peut établir facilement que le nombre p est au plus égal en valeur absolue au nombre des solutions $(t', u', v', \ldots)$ de ce système, qui sont constituées chacune par un point t' situé dans l'intérieur de T, un point u' dans l'intérieur de U, un point v' dans l'intérieur de V, etc. Je me bornerai, pour abréger l'écriture, à examiner le cas de deux fonctions $f(t, u)$ et $\varphi(t, u)$. J'avertis de suite que, pour l'exactitude de la proposition, il est nécessaire d'admettre que les coefficients des plus hautes puissances de t et de u dans $f(t, u)$ et $\varphi(t, u)$ soient numériques, afin, par exemple, qu'aucune des déterminations de u tirées de l'équation $f(t, u) = 0$ ne puisse devenir infinie pour une valeur finie de t. Je passe maintenant à la démonstration du théorème.

Si $f_1(x, y)$ et $\varphi_1(x, y)$ désignent deux polynômes entiers en x et y, et que $F(x, y)$ soit un troisième polynôme de degré moindre que le déterminant fonctionnel $\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} = P_1(x, y)$ des deux premiers, on a la formule bien connue de Jacobi

$$\sum \frac{F(\alpha_1, \beta_1)}{P_1(\alpha_1, \beta_1)} = 0,$$

dans laquelle la sommation se rapporte à toutes les solutions (α_1, β_1) du système d'équations

$$f_1(x, y) = 0, \quad \varphi_1(x, y) = 0. \tag{1}$$

Appliquons cette formule au cas où $f_1(x, y)$ et $\varphi_1(x, y)$ sont égaux respectivement aux produits $f(x, y)(x - t)$, $\varphi(x, y)(y - u)$ de deux fonctions entières $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ par les facteurs du premier degré $x - t$, $y - u$. Les solutions du système (1) peuvent, dans ce cas, être divisées en quatre groupes. Le premier groupe comprendra les solutions (α, β) du système

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0; \tag{2}$$

le second groupe les solutions (t, b_i) formées en combinant la valeur t de x avec les racines $y = b_i$ de l'équation $\varphi(t, y) = 0$; le troisième groupe les combinaisons (a_i, u), qu'on obtient en associant à la

valeur u de y les diverses valeurs a_i de x tirées de l'équation $f(x, u) = 0$; enfin le quatrième groupe sera constitué par la solution unique $x = t$, $y = u$. Le déterminant fonctionnel $P_1(x, y)$ se calculera immédiatement au moyen des formules

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x-t) + f, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x-t),$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{dx} = \frac{\partial \varphi}{dx}(y-u), \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y-u) + \varphi,$$

qui donnent

$$P_1(x,y) = (x-t)(y-u)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + (x-t)\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + (y-u)f\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f\varphi,$$

ou, plus simplement,

$$P_1(x,y) = (x-t)(y-u)P(x,y) + (x-t)\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + (y-u)f\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f\varphi,$$

en représentant par $P(x, y)$ le déterminant fonctionnel relatif aux fonctions f et φ. On voit alors qu'on aura pour $P_1(x, y)$ quatre formes différentes, correspondant aux quatre groupes de solutions, et qui seront

$$(\alpha - t)(\beta - u)P(\alpha, \beta), \quad (b_i - u)f(t, b_i)\frac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial b_i},$$

$$(a_i - t)\varphi(a_i, u)\frac{\partial f(a_i, u)}{\partial a_i}, \quad f(t, u)\varphi(t, u).$$

La formule de Jacobi pourra être appliquée à une fonction entière quelconque $F(x, y)$ dont le degré sera moindre que celui du produit $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, et elle donnera

$$\sum \frac{F(\alpha, \beta)}{(\alpha - t)(\beta - u)P(\alpha, \beta)} + \sum \frac{F(t, b_i)}{(b_i - u)f(t, b_i)\frac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial b_i}}$$
$$+ \sum \frac{F(a_i, u)}{(a_i - t)\varphi(a_i, u)\frac{\partial f(a_i, u)}{\partial a_i}} + \frac{F(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)} = 0.$$

Les sommations se rapportent respectivement aux racines des trois premiers groupes.

Faisons l'hypothèse

$$F(x, y) = P(x, y).$$

Dans ce cas,

$$F(\alpha, \beta) = P(\alpha, \beta),$$

$$\frac{F(t, b_i)}{f(t, b_i)\dfrac{\partial\varphi(t, b_i)}{\partial b_i}} = \frac{\dfrac{\partial f(t, b_i)}{\partial t}\dfrac{\partial\varphi(t, b_i)}{\partial b_i} - \dfrac{\partial f(t, b_i)}{\partial b_i}\dfrac{\partial\varphi(t, b_i)}{\partial t}}{f(t, b_i)\dfrac{\partial\varphi(t, b_i)}{\partial b_i}}$$

$$= \frac{1}{f(t, b_i)}\left[\frac{\partial f(t, b_i)}{\partial t} - \frac{\partial f(t, b_i)}{\partial b_i}\frac{\dfrac{\partial\varphi(t, b_i)}{\partial t}}{\dfrac{\partial\varphi(t, b_i)}{\partial b_i}}\right].$$

Mais b_i est une fonction de t définie par la relation

$$\varphi(t, b_i) = 0,$$

qui donne, par la différentiation,

$$\frac{\partial\varphi(t, b_i)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(t, b_i)}{\partial b_i}\frac{db_i}{dt} = 0$$

ou

$$\frac{db_i}{dt} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi(t, b_i)}{\partial t}}{\dfrac{\partial\varphi(t, b_i)}{\partial b_i}};$$

donc

$$\frac{F(t, b_i)}{f(t, b_i)\dfrac{\partial\varphi(t, b_i)}{\partial b_i}} = \frac{1}{f(t, b_i)}\left[\frac{\partial f(t, b_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, b_i)}{\partial b_i}\frac{db_i}{dt}\right] = \frac{\dfrac{d f(t, b_i)}{dt}}{f(t, b_i)},$$

où le numérateur n'est plus une dérivée partielle. On trouvera de même

$$\frac{F(a_i, u)}{\varphi(a_i, u)\dfrac{\partial f(a_i, u)}{\partial a_i}} = \frac{\dfrac{d\varphi(a_i, u)}{du}}{\varphi(a_i, u)},$$

formule dans laquelle, en prenant la dérivée qui entre dans le second

membre, on devra considérer a_i comme une fonction de u définie par la relation $f(a_i, u) = 0$. Par conséquent, nous pouvons écrire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{P(t,u)}{f(t,u)\varphi(t,u)} &= -\sum \frac{1}{(t-\alpha)(u-\beta)} \\ &\quad + \sum \frac{1}{u-b_i}\,\frac{\dfrac{df(t,b_i)}{dt}}{f(t,b_i)} + \sum \frac{1}{t-a_i}\,\frac{\dfrac{d\varphi(a_i,u)}{du}}{f(a_i,u)}. \end{aligned}\right.$$

Multiplions les deux membres de cette identité par $dt\,du$, puis intégrons les résultats par rapport à t le long d'un contour fermé T, et par rapport à u le long d'un autre contour fermé U, t et u étant ainsi des variables imaginaires, comme dans les intégrales définies simples étudiées par Cauchy. Parmi les solutions (α, β) du système (2), il peut en exister quelques-unes pour chacune desquelles le point α soit dans l'intérieur du contour T, et en même temps le point B dans l'intérieur du contour U; soit S le nombre de ces solutions. L'intégrale

$$\int\!\!\int \frac{dt\,du}{(t-\alpha)(u-\beta)} = \int \frac{dt}{t-\alpha}\int\frac{du}{u-\beta}$$

n'aura une valeur différente de zéro que quand les points α et β correspondants se trouveront respectivement dans l'intérieur des contours T et U, et, dans ce cas, sa valeur sera égale, d'après un théorème bien connu de Cauchy, à

$$(2\pi\sqrt{-1})^2 = -4\pi^2.$$

Donc

$$-\sum\int\!\!\int \frac{dt\,du}{(t-\alpha)(u-\beta)} = 4S\pi^2.$$

Envisageons maintenant l'intégrale

$$(4)\qquad \int\!\!\int \frac{\dfrac{df(t,b_i)}{dt}}{f(t,b_i)}\,\frac{dt\,du}{u-b_i}.$$

Pour la calculer, on peut d'abord attribuer à t une valeur constante se rapportant à un point du contour T, puis effectuer l'intégration de $\dfrac{du}{u-b_i}$ le long du contour U; le résultat de cette dernière intégration

est o ou $2\pi\sqrt{-1}$, suivant que le point b_i se trouve à l'extérieur de ce contour ou à son intérieur. Or, quand on fera parcourir au point t le contour T, le point b_i décrira une courbe qui sera située tout entière soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de U; car, si elle traversait le contour U, pour chacun des points d'intersection on aurait, puisque $\varphi(t, b_i)$ est identiquement nul,

$$\varphi(t, u) = 0,$$

u se rapportant à ce point et t à un point de T, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que nous avons faite. Donc la valeur de l'expression (4) est ou zéro ou bien celle de l'intégrale

$$2\pi i \int \frac{\frac{df(t, b_i)}{dt}}{f(t, b_i)} dt,$$

dans laquelle l'intégration doit être faite tout le long du contour T. Cette dernière quantité est évidemment égale à

$$2\pi i(2\pi m' i) = -4\pi^2 m',$$

m' désignant le nombre de racines de l'équation $f(t, b_i) = 0$ situées à l'intérieur de T. Ce sont les seuls points critiques que nous ayons à examiner, puisque nous admettons que la plus haute puissance de u dans $\varphi(t, u)$ a pour coefficient une constante, et qu'alors b_i et par suite $f(t, b_i)$ ne peuvent devenir infinis pour aucune valeur finie de t. En résumé, l'expression

$$\sum \int\int \frac{\frac{df(t, b_i)}{dt}}{f(t, b_i)} \frac{dt\, du}{u - b_i} \tag{5}$$

est de la forme $-4\pi^2 m$, m ne pouvant pas être négatif; je dis, de plus, que m est au plus égal à S. En effet, pour calculer l'intégrale (4), au lieu d'opérer comme précédemment, on peut d'abord donner à u une valeur constante se rapportant à un point du contour U, et intégrer la différentielle

$$\frac{\frac{df(t, b_i)}{dt}}{f(t, b_i)} \frac{dt}{u - b_i}$$

le long du contour T. Parmi les points critiques, on remarque, en premier lieu, les racines $\alpha\mu$ de l'équation $f(t, b_i) = 0$ qui sont à l'intérieur de T; ces racines font partie de quelques-unes des solutions (α_μ, β_μ) du système (2) et elles fournissent dans l'intégrale la quantité $2\pi\sqrt{-1}\sum\frac{1}{u-\beta_\mu}$. La portion correspondante de (5) est $2\pi\sqrt{-1}\sum\int\frac{du}{u-\beta}$, les β étant les associés de tous les α qui se trouvent enfermés dans le contour T, et par conséquent cette portion est égale à $-4\pi^2 S$. Mais il faut aussi considérer les points critiques donnés par la relation $b_i = u$. S'il y a des racines de cette équation à l'intérieur de T, ces racines, par la continuité, formeront des courbes situées tout entières à cet intérieur, lorsque u voyagera sur U, en vertu de l'hypothèse que nous avons faite antérieurement, tandis que les courbes formées par les racines primitivement extérieures restent partout extérieures. Soit t_i une racine intérieure; le résidu correspondant aura pour valeur

$$-\frac{1}{\frac{db_i}{dt_i}}\,\frac{\frac{df(t_i, b_i)}{dt_i}}{f(t_i, b_i)},$$

c'est-à-dire

$$-\frac{dt_i}{du}\,\frac{\frac{df(t_i, u)}{du}\,\frac{du}{dt_i}}{f(t_i, u)} = -\frac{\frac{df(t_i, u)}{du}}{f(t_i, u)},$$

puisque de $b_i = u$ on tire

$$\frac{db_i}{dt_i}\,\frac{dt_i}{du} = 1.$$

On est donc conduit à calculer l'expression

$$-2\pi i\sum\int\frac{\frac{df(t_i, u)}{du}}{f(t_i, u)}\,du,$$

la somme s'étendant à quelques-unes des racines t_i des diverses équations $b_i = u$, racines t_i qui sont des déterminations de t, définies par

l'équation $\varphi(t, u) = 0$. Cette expression est égale à

$$-2\pi i(2\pi i m'') = 4\pi^2 m'',$$

m'' étant un nombre entier positif. Donc la somme (5) est égale à

$$-4\pi^2 S + 4\pi^2 m'',$$

ce qui établit la relation relative au nombre m, à laquelle nous voulions arriver. On montre de même que l'intégrale qui se rapporte au troisième terme du second membre de la formule (3) est de la forme $-4\pi^2 n$, n n'étant pas négatif et ayant une valeur absolue au plus égale à S, et l'on en conclura

$$\int\int \frac{P(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)} dt\, du = 4\pi^2(S - m - n) = 4\pi^2 p,$$

p étant compris entre $-S$ et $+S$. C'est le théorème que nous nous proposions de démontrer. Si $S = 0$, $p = 0$.

III.

La formule (3) du paragraphe précédent peut être mise sous une autre forme. On peut, en effet, calculer les deux dernières sommes qui entrent dans le second membre de cette formule au moyen d'opérations très-simples, effectuées sur les fonctions algébriques $f(t, u)$, $\varphi(t, u)$, $P(t, u)$. Considérant les polynômes f et φ comme des fonctions de u, et effectuant sur elles les opérations du plus grand commun diviseur, on en déduira une identité de la forme

$$1 = f(t, u)\varphi_1(t, u) + \varphi(t, u) f_1(t, u),$$

dans laquelle φ_1 et f_1 sont des polynômes en u; par conséquent,

$$\frac{P(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)} = \frac{P(t, u)\varphi_1(t, u)}{\varphi(t, u)} + \frac{P(t, u) f_1(t, u)}{f(t, u)}.$$

Si l'on extrait des fractions rationnelles en u du second membre de cette dernière identité les parties entières, leur somme sera nulle, et

en désignant par $\varphi_2(t,u)$ et $F(t,u)$ les restes des divisions par $\varphi(t,u)$ et $f(t,u)$ des polynômes respectifs $P(t,u)\varphi_1(t,u)$ et $P(t,u)f_1(t,u)$, on aura identiquement

$$\frac{P(t,u)}{f(t,u)\varphi(t,u)} = \frac{\varphi_2(t,u)}{\varphi(t,u)} + \frac{F(t,u)}{f(t,u)}.$$

Or

$$\sum \frac{1}{u-b_i}\,\frac{\frac{df(t,b_i)}{dt}}{f(t,b_i)} = \sum \frac{1}{u-b_i}\left[\frac{P(t,u)}{\frac{\partial}{\partial u}\big(f(t,u)\varphi(t,u)\big)}\right]_{u=b_i};$$

donc

$$\sum \frac{1}{u-b_i}\,\frac{\frac{df(t,b_i)}{dt}}{f(t,b_i)} = \frac{\varphi_2(t,u)}{\varphi(t,u)}.$$

On aura de même

$$\sum \frac{1}{t-a_i}\,\frac{\frac{d\varphi(a_i,u)}{du}}{\varphi(a_i,u)} = \frac{f_2(t,u)}{f(t,u)},$$

$f_2(t,u)$ étant un polynôme en t (généralement fractionnaire en u), dont la formation est analogue à celle de $\varphi_2(t,u)$. La formule (3) devient donc

$$\frac{P(t,u)}{f(t,u)\varphi(t,u)} - \frac{\varphi_2(t,u)}{\varphi(t,u)} - \frac{f_2(t,u)}{f(t,u)} = -\sum \frac{1}{(t-\alpha)(u-\beta)},$$

et l'on en déduit, pour le nombre S des racines contenues dans les deux contours T et U, la formule

$$S = \frac{1}{4\pi^2}\int\!\!\int\left[\frac{P(t,u)}{f(t,u)\varphi(t,u)} - \frac{\varphi_2(t,u)}{\varphi(t,u)} - \frac{f_2(t,u)}{f(t,u)}\right] dt\,du,$$

qui suppose seulement satisfaite cette unique condition, à savoir que le contour T ne passe par aucun point α et le contour U par aucun des points β.

Je terminerai cet article par quelques observations. L'intégrale

$$\int\!\!\int \sum \frac{1}{u-b_i}\,\frac{\frac{df(t,b_i)}{dt}}{f(t,b_i)}\,dt\,du$$

est évidemment nulle, si tous les points b_i qui se rapportent à un même point t du contour T, le point t_1, par exemple, sont situés à l'extérieur de U, c'est-à-dire si

$$\int \frac{\frac{d\varphi(t,u)}{du}}{\varphi(t_1,u)}\,du = 0.$$

Je suppose qu'on ait, en même temps, l'égalité

$$\int \frac{\frac{df(t,u_1)}{dt}}{f(t,u_1)}\,dt = 0,$$

qui entraîne celle-ci :

$$\int\int \sum \frac{1}{t-a_i}\,\frac{\frac{d\varphi(a_i,u)}{du}}{\varphi(a_i,u)}\,dt\,du = 0;$$

alors, en se rapportant à la formule (3), citée plus haut, on en conclura

$$S = \frac{1}{4\pi^2}\int\int \frac{P(t,u)}{f(t,u)\,\varphi(t,u)}\,dt\,du = -\frac{1}{4\pi^2}\int \frac{\frac{df(t_1,u)}{du}}{f(t_1,u)}\,du \int \frac{\frac{d\varphi(t,u_1)}{dt}}{\varphi(t,u_1)}\,dt,$$

c'est-à-dire que S sera rigoureusement égal au produit du nombre des racines de l'équation $f(t_1,u)=0$, qui sont à l'intérieur de U, par le nombre des racines de l'équation $\varphi(t,u_1)=0$, qui sont enfermées par le contour T. Ceci suppose qu'il n'y ait aucune racine de $\varphi(t_1,u)=0$ dans U, et aucune racine de $f(t,u_1)=0$ dans T. Si ces dernières conditions ne sont pas réalisées à l'égard de f et de φ, elles pourront l'être quelquefois par une détermination convenable des constantes λ et λ' à l'égard des équations

$$f(t_1,u)+\lambda'\varphi(t_1,u)=0,\quad f(t,u_1)+\lambda\varphi(t,u_1)=0,$$

et, par conséquent, comme les deux systèmes d'équations

$$\begin{array}{ll} f(t,u)=0, & \varphi(t,u)=0, \\ f(t,u)+\lambda\varphi(t,u)=0, & f(t,u)+\lambda'\varphi(t,u)=0 \end{array}$$

sont équivalents, S sera encore égal au produit du nombre des racines de

$$f(t_1, u) + \lambda\varphi(t_1, u) = 0,$$

qui sont dans U, par le nombre des racines de

$$f(t, u_1) + \lambda'\varphi(t, u_1) = 0,$$

qui sont dans l'intérieur de T.

La seconde remarque que je ferai se rapportera à la formule du paragraphe II, qui a conduit, comme cas particulier, à la formule (3), et qui donne une certaine décomposition de l'expression $\frac{F(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)}$, quand le degré du numérateur est moindre que celui du dénominateur. On peut la transformer comme la formule (3), et l'on est ainsi amené à l'identité

$$\frac{F(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)} = -\sum \frac{F(\alpha, \beta)}{(t-\alpha)(u-\beta)\,P(\alpha, \beta)} + \frac{\Phi_1(t, u)}{\varphi(t, u)} + \frac{F_1(t, u)}{f(t, u)},$$

dans laquelle $\frac{\Phi_1(t, u)}{\varphi(t, u)}$ et $\frac{F_1(t, u)}{f(t, u)}$ désignent des fractions rationnelles par rapport aux variables respectives u et t. On voit de suite que $\Phi_1(t, u)$ est de la forme $\frac{\Phi_2(t, u)}{\pi(t-\alpha)}$, Φ_2 étant un polynôme entier par rapport à t et u, et $\pi(t, \alpha)$ étant le produit de tous les facteurs binômes analogues à $t-\alpha$; de même $F_1(t, u)$ est de la forme $\frac{F_2(t, u)}{\pi(u-\beta)}$. Cette identité rappelle la décomposition en fractions simples des fractions rationnelles à une variable, en ce sens que la partie $-\sum \frac{F(\alpha, \beta)}{(t-\alpha)(u-\beta)\,P(\alpha, \beta)}$ est tout à fait analogue à la somme $\sum \frac{\varphi(\alpha)}{(t-\alpha)f'(\alpha)}$ qui représente $\frac{\varphi(t)}{f(t)}$; mais il y a une différence essentielle, puisque, quand on a extrait cette partie de $\frac{F(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)}$, il reste encore des fractions $\frac{\Phi_1(t, u)}{\varphi(t, u)}$, $\frac{F_1(t, u)}{f(t, u)}$, qui sont à la vérité plus simples que cette dernière.

Enfin j'énoncerai sans démonstration les formules suivantes, qu'on vérifie facilement, et dont l'exactitude suppose seulement qu'aucune

des fonctions f et φ ne s'annule pour un système de points t, u, pris respectivement sur les contours T et U :

$$\int\int -\frac{f\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\frac{\partial f}{\partial u}}{f\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\frac{\partial f}{\partial t}}\left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}{f^2}-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2}{\varphi^2}\right]dt\,du$$

$$+\int\int\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial u}}{f}dt\,du-\int\int\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial u}}{\varphi}dt\,du=4p\pi^2,$$

$$\int\int -\frac{f\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\frac{\partial f}{\partial t}}{f\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\frac{\partial f}{\partial u}}\left[\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{\varphi^2}-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{f^2}\right]dt\,du$$

$$+\int\int\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial u}}{\varphi}dt\,du-\int\int\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial u}}{f}dt\,du=4p\pi^2,$$

$$\int\int\frac{\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2}{\varphi^2\left(-f\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\frac{\partial f}{\partial t}\right)}dt\,du$$

$$+\int\int\frac{\left(-f\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{df}{du}\right)^2}{f^2\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\frac{\partial f}{\partial u}\right)}dt\,du$$

$$-\int\int\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{\left(-f\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\frac{\partial f}{\partial u}\right)}dt\,du$$

$$+\int\int\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t\,\partial u}}{f}dt\,du+\int\int\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial u}}{\varphi}dt\,du=4p\pi^2,$$

p ayant la même signification que précédemment.

NOTE SUR L'ATTRACTION,

PAR M. F. DIDON,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

I.

Je représenterai la grandeur de l'attraction qui s'exerce entre deux éléments matériels ayant une masse égale à l'unité par $f'(\rho)$, $f'(\rho)$ étant une fonction quelconque de la distance ρ des deux points. Soient, pour cette loi d'attraction,

$$V = -\int f(\rho)\, dm$$

le potentiel d'une masse quelconque relativement au point x, y, z; et X, Y, Z les composantes, suivant les axes supposés rectangulaires, de l'attraction de la masse sur le point. On a

$$\rho^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

a, b, c désignant les coordonnées d'un point quelconque de la masse attirante, et

$$X = \int f'(\rho)\frac{a-x}{\rho}\, dm = \frac{dV}{dx},$$

$$Y = \int f'(\rho)\frac{b-y}{\rho}\, dm = \frac{dV}{dy},$$

$$Z = \int f'(\rho)\frac{c-z}{\rho}\, dm = \frac{dV}{dz}.$$

Si le point x, y, z se déplace sur une surface, z sera une fonction de x et de y, dont j'appellerai, suivant l'usage, p et q les dérivées partielles

du premier ordre; alors V sera une fonction V_1 de x et de y, et aussi X, Y, Z, et l'on aura

$$\frac{dV_1}{dx} = \int \frac{f'(\rho)}{\rho} [a - x + p(c - z)]\, dm = X + pZ,$$

$$\frac{dV_1}{dy} = \int \frac{f'(\rho)}{\rho} [b - y + q(c - z)]\, dm = Y + qZ.$$

Particularisons maintenant la surface sur laquelle se déplace le point x, y, z, et supposons que l'attraction $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ soit la même sur tous les points de cette surface qu'on pourrait nommer d'égale attraction. Par chacun de ces points passe une droite suivant laquelle est dirigée l'attraction correspondante. Je dis qu'on peut prendre sur chacune de ces droites, à partir de la surface d'égale attraction, une longueur l telle, que le lieu de l'autre extrémité de cette longueur soit une surface normale à toutes ces droites. En effet, x_1, y_1, z_1 désignant les coordonnées de cette extrémité, on a

$$x - x_1 = l\frac{X}{R}, \quad y - y_1 = l\frac{Y}{R}, \quad z - z_1 = l\frac{Z}{R},$$

d'où

$$dx - dx_1 = l.d\frac{X}{R} + dl\frac{X}{R}, \quad dy - dy_1 = l.d\frac{Y}{R} + dl\frac{Y}{R}, \quad dz - dz_1 = l.d\frac{Z}{R} + dl\frac{Z}{R}.$$

Multiplions ces équations respectivement par $\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}$, et ajoutons les résultats, il viendra, en observant que d'un côté nous voulons satisfaire à l'égalité,

$$X\,dx_1 + Y\,dy_1 + Z\,dz_1 = 0,$$

et que, d'un autre, la relation

$$\left(\frac{X}{R}\right)^2 + \left(\frac{Y}{R}\right)^2 + \left(\frac{Z}{R}\right)^2 = 1$$

entraîne la suivante

$$\frac{X}{R}d\frac{X}{R} + \frac{Y}{R}d\frac{Y}{R} + \frac{Z}{R}d\frac{Z}{R} = 0,$$

$$\frac{1}{R}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = dl,$$

ou bien

$$dl = \frac{1}{R}\left[(X + pZ)\,dx + (Y + qZ)\,dy\right] = \frac{1}{R}\left(\frac{dV_1}{dx}\,dx + \frac{dV_1}{dy}\,dy\right).$$

Comme R est constant, on a

$$l = \frac{V_1}{R} + C.$$

La constante arbitraire C donne le groupe des surfaces parallèles en nombre infini qu'on devait trouver; si on la suppose nulle, on a

$$l = \frac{V_1}{R}.$$

On peut donc énoncer ce théorème :

Si, pour une loi quelconque d'attraction, on considère relativement à une masse attirante quelconque aussi une surface d'égale attraction, c'est-à-dire telle que l'attraction de la masse sur tous les points de cette surface ait une même valeur R, *les droites suivant lesquelles sont dirigées les attractions sur les divers points de cette surface sont toutes normales à une même seconde surface qui intercepte avec la première sur chacune de ces droites un segment égal au quotient par* R *du potentiel de la masse attirante sur le point correspondant de la première surface.*

II.

La masse attirante et la loi d'attraction étant toujours quelconques, et le point x, y, z étant encore assujetti à se mouvoir sur une surface, on peut se proposer la question suivante :

Trouver une relation entre les dérivées partielles de V_1 *et de* Z *relativement à* x *et* y.

La solution de cette question aurait de l'importance dans plusieurs recherches, entre autres dans celle des figures d'équilibre d'une masse fluide tournant autour d'un axe d'un mouvement uniforme, et dont tous les points s'attirent mutuellement suivant une certaine loi fonction de la distance. Car, en prenant l'axe de rotation pour axe des Z, on

doit avoir, pour la surface,

$$\left(\frac{dV}{dx} + \omega^2 x\right) dx + \left(\frac{dV}{dy} + \omega^2 y\right) dy + \frac{dV}{dz}(p\,dx + q\,dy) = 0,$$

ou

$$\frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dz} = \frac{dV_1}{dx} = -\omega^2 x, \quad \frac{dV}{dy} + q\frac{dV}{dz} = \frac{dV_1}{dy} = -\omega^2 y,$$

ou enfin

$$V_1 = C - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

En substituant donc dans la relation dont il est question, et qu'on appliquerait en particulier à la surface du fluide, cette valeur de V_1, on aurait une équation aux dérivées partielles à laquelle satisferait la surface d'équilibre cherchée. Malheureusement, la solution du problème posé au commencement de ce paragraphe semble difficile pour une loi d'attraction quelconque, et en particulier pour la loi de la gravitation; mais il y a une infinité de formes de la fonction $f(\rho)$ pour lesquelles on peut le résoudre, ainsi que je vais le faire voir. On a

$$\frac{d^2V_1}{dx^2} = -\int \frac{\rho f'' - f'}{\rho^3}[x - a + p(z - c)]^2 dm$$
$$-(1 + p^2)\int \frac{f'}{\rho}\,dm - r\int \frac{f'}{\rho}(z - c)\,dm,$$

$$\frac{d^2V_1}{dx\,dy} = -\int \frac{\rho f'' - f'}{\rho^3}[x - a + p(z - c)][y - b + q(z - c)]\,dm$$
$$-pq\int \frac{f'}{\rho}\,dm - s\int \frac{f'}{\rho}(z - c)\,dm,$$

$$\frac{d^2V_1}{dy^2} = -\int \frac{\rho f'' - f'}{\rho^3}[y - b + q(z - c)]^2 dm$$
$$-(1 + q^2)\int \frac{f'}{\rho}\,dm - t\int \frac{f'}{\rho}(z - c)\,dm,$$

r, s, t étant les dérivées partielles du second ordre de Z.

Si $\rho f'' - f' = 0$ ou $f' = h\rho$, c'est-à-dire si l'attraction est proportionnelle à la distance, on peut éliminer des équations précédentes les deux intégrales

$$\int \frac{f'}{\rho}\,dm \quad \text{et} \quad \int \frac{f'}{\rho}(z - c)\,dm,$$

et il vient

$$[pqt-(1+q^2)s]\frac{d^2V_1}{dx^2}-[(1+p^2)t-(1+q^2)r]\frac{d^2V_1}{dx\,dy}+[(1+p^2)s-pqr]\frac{d^2V_1}{dy^2}=0.$$

En appliquant cette équation au problème spécial énoncé plus haut, on la transforme, puisque

$$\frac{d^2V_1}{dx^2}=\frac{d^2V_1}{dy^2}=-\omega^2,\quad \frac{d^2V_1}{dx\,dy}=0,$$

et

$$(p^2-q^2)s-pq(r-t)=0.$$

Ainsi la figure permanente d'équilibre doit satisfaire à cette relation pour la loi d'attraction précédente. Cette relation ne permet pas de déterminer les figures d'équilibre qui sont de révolution, parce qu'elle est satisfaite pour toute surface de révolution. On peut en trouver facilement l'intégrale générale par les méthodes connues : il n'y a qu'à appliquer la méthode de Cauchy à l'une ou à l'autre des deux intégrales premières

$$p^2+q^2=\varphi(z),\quad y-x\frac{q}{p}=\varphi\left(\frac{q}{p}\right),$$

auxquelles on arrive aisément. En l'appliquant, par exemple, à la première, on met l'intégrale générale sous la forme

$$V=x^2+(y-\beta)^2-[\varphi(z)-\varphi(\psi\beta)]^2=0,\quad \frac{dV}{d\beta}=0,$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires.

Nous allons maintenant supposer non plus $\rho f''-f'=0$, mais

$$\frac{d\,\dfrac{\rho f''-f'}{\rho^3}}{d\rho}=\frac{\rho^2 f'''-3\rho f''+3f'}{\rho^4}=0,$$

ce qui correspond à la loi d'attraction

$$f'=C\rho+C'\rho^3,$$

C et C' étant deux constantes arbitraires. Dans ce cas, si l'on prend les dérivées de V_1, des ordres plus élevés que le second, les expressions de ces dérivées contiendront des termes qui seront exclusivement renfer-

més dans les types suivants :

$$\mathrm{A}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}\,dm,\quad \mathrm{B}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(x-a)\,dm,\quad \mathrm{C}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(y-b)\,dm,$$

$$\mathrm{D}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(z-c)\,dm,\quad \mathrm{E}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(x-a)(z-c)\,dm,$$

$$\mathrm{F}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(y-b)(z-c)\,dm,\quad \mathrm{G}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(z-c)^2\,dm,$$

$$\mathrm{H}\int\frac{f'}{\rho}\,dm,\quad \mathrm{K}\int\frac{f'}{\rho}(z-c)\,dm,$$

A, B, C, D, E, F, G, H, K ne renfermant rien qui se rapporte au corps attirant. Si donc on veut résoudre la question proposée pour la loi particulière d'attraction qui nous occupe, on aura neuf quantités à éliminer, et pour le faire il suffira de dix équations. On pourra prendre les quatre qui se rapportent aux dérivées de V_1 du troisième ordre, les cinq qui correspondent aux dérivées de V_1 du quatrième ordre, et l'une quelconque de celles qui donnent les dérivées du cinquième ordre de V_1, et l'on aura ainsi une équation du cinquième ordre par rapport aux dérivées partielles de V_1, et ainsi de Z qui résout la question, et qui ne contiendra aucune dérivée de V_1 d'un ordre inférieur au troisième. C'est dire qu'elle se réduira à une identité dans la recherche des figures d'équilibre; mais la première question est résolue dans le cas dont nous parlons. On la résoudrait encore de la même façon si, au lieu de la relation $\rho^2 f''' - 3\rho f'' + 3f' = 0$, on avait la suivante :

$$\frac{d}{d\rho}\,\frac{\dfrac{\rho^2 f''' - 3\rho f'' + 3f'}{\rho^5}}{d\rho} = \frac{\rho^3 f^{\mathrm{iv}} - 6\rho^2 f''' - 15\rho f'' - 15 f'}{\rho^6} = 0,$$

qui donne

$$f' = C\rho + C'\rho^3 + C''\rho^5,$$

et, en général, quand f' est une fonction entière et impaire quelconque de ρ; mais, à mesure que le degré de cette fonction s'élèvera, l'ordre de l'équation cherchée s'élèvera également.

Le théorème démontré par Didon, page 31, avait été énoncé et démontré d'une autre manière par M. Laurent (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 24 août 1858). Nous avons tenu néanmoins à publier le travail de notre regretté camarade. (*Note du Directeur.*)

MÉMOIRE

SUR LES

CONDITIONS A REMPLIR DANS L'EMPLOI DU FREIN DYNAMOMÉTRIQUE[1],

PAR M. KRETZ,

INGÉNIEUR EN CHEF, INSPECTEUR DES MANUFACTURES DE L'ÉTAT.

Le frein dynamométrique employé, en 1821, par Prony, pour évaluer la puissance de la machine à vapeur du Gros-Caillou est encore aujourd'hui l'appareil le plus généralement usité pour mesurer le travail disponible fourni par les machines. L'exactitude des résultats obtenus par son emploi dépend, comme pour tout instrument de mesure, de l'habileté de l'opérateur, des soins apportés à l'expérience et de la disposition propre de l'appareil. Le but que l'on doit chercher à atteindre est de limiter autant que possible l'influence du premier de ces éléments, de recourir à des dispositions qui conduisent à la même mesure quel que soit l'opérateur, et qui, surtout, ne permettent jamais à celui-ci de faire varier les évaluations. En un mot, l'instrument en lui-même ne doit renfermer aucune cause d'erreur, et mieux vaut qu'il ne puisse conduire à aucun résultat quand l'expérience est mal dirigée, que de le disposer de telle sorte qu'il donne avec facilité des résultats incertains ou variables à volonté.

Les divers modèles de frein qui sont ordinairement employés dans l'industrie ne sont pas, à cet égard, à l'abri de tout reproche; le plus

(1) Présenté à l'Académie des Sciences le 7 mars 1864.

souvent on sacrifie l'exactitude au désir d'éviter des installations coûteuses, ou à l'unique préoccupation de rendre les expériences plus commodes. Il en résulte que, malgré le grand nombre d'essais au frein qui ont été exécutés depuis une trentaine d'années, on n'a que des données assez incertaines sur le rendement des machines motrices, surtout sur la dépense de combustible qu'elles exigent, et que, bien souvent, deux machines complétement semblables, construites avec les mêmes soins, dans un même atelier, donnent lieu à des appréciations très-différentes. Il est donc du plus haut intérêt, pour le constructeur comme pour l'industriel, qu'une rigueur complète soit introduite dans les moyens de mesure, de telle sorte que les résultats obtenus dans toutes les expériences deviennent comparables entre eux.

C'est vers ce but qu'ont été dirigés les efforts des expérimentateurs célèbres qui, peu de temps après l'invention du frein, contribuèrent si puissamment à en répandre et à en généraliser l'emploi. M. Poncelet, le premier, apporta dans la disposition primitive imaginée par M. Prony, décrite dans le tome XIX des *Annales de Chimie et de Physique* (année 1821), plusieurs modifications destinées à en faciliter l'installation et le maniement; d'autres ingénieurs, MM. Piobert, Tardy, Morin, en France, Egen, en Prusse, firent de nombreuses expériences et réalisèrent de nouvelles améliorations qui sont décrites dans les diverses publications de ces auteurs.

En 1837, M. de Saint-Léger, qui venait de faire des essais multipliés dans le département de la Seine-Inférieure, inséra dans les *Annales des Mines* (tome XII) une Notice détaillée signalant les inconvénients que le frein ordinaire présente dans la pratique, et indiquant les précautions de tout genre qu'il convient de prendre pour obtenir une mesure facile et exacte du travail. Ces prescriptions, quoique conduisant sur certains points à des dispositions trop compliquées, étaient basées sur la saine théorie que l'on a peut-être eu le tort de trop négliger dans la suite.

Depuis 1846, de nombreux essais au frein ont été exécutés par les Ingénieurs de l'Administration des Tabacs. M. Rolland qui, à cette époque, était ingénieur, inspecteur des constructions du service, s'efforça, dès l'origine, d'introduire dans ces expériences délicates toute la rigueur dont elles sont susceptibles; plusieurs modifications furent

apportées par lui, plus tard par M. Demondésir et par moi, aux appareils ainsi qu'aux procédés d'expérimentation ordinairement employés. Quoique toutes les difficultés qui se présentent dans les essais des machines très-puissantes ne soient pas encore résolues d'une manière complète, nous croyons avoir fait faire des progrès sérieux à la question.

THÉORIE DU FREIN.

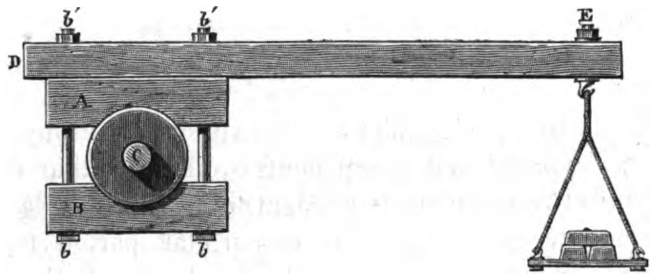
La théorie du frein, telle qu'elle a été exposée par Prony lui-même, suppose que l'appareil soit exactement équilibré autour de l'axe de l'arbre moteur et reste en repos pendant toute la durée de l'essai. La disposition adoptée par l'illustre inventeur était parfois fort gênante et a dû être abandonnée; M. de Saint-Léger, dans sa Notice, a indiqué plusieurs procédés pour équilibrer un frein quelconque, sans insister, du reste, sur la nécessité de ces précautions; dans sa théorie il suppose, ainsi que Prony, que le frein reste en repos, et, tout en décrivant un moyen de ralentir les oscillations qui se produisent inévitablement, il a omis d'en étudier l'influence. Cependant des doutes ont souvent été élevés sur ce point, et l'on s'est demandé si la formule qui est exacte pour l'état d'équilibre l'est également lorsqu'il se produit des oscillations.

Je vais rappeler succinctement la théorie, en supposant que le centre de gravité du frein ne se trouve pas sur l'axe de l'arbre; j'examinerai ensuite l'influence des oscillations, je déduirai de cette étude les conditions que doit remplir l'appareil pour conduire à des résultats exacts; enfin j'indiquerai les moyens pratiques à employer pour réaliser ces conditions.

Conditions d'équilibre du frein. — Le frein dynamométrique se compose essentiellement de deux mâchoires en bois A et B (*fig.* 1) que l'on peut serrer plus ou moins à l'aide de deux boulons bb' munis d'écrous, contre la jante d'une poulie montée sur l'arbre C, auquel est transmis le travail qu'il s'agit de mesurer; une barre DE, que l'on appelle *levier* du frein, est solidement reliée à l'une ou à l'autre des deux mâchoires et porte, vers l'extrémité E, un crochet auquel est suspendu

un plateau de balance. De la pression des mâchoires sur la poulie résulte, par suite du mouvement de l'arbre, un frottement qui tend à entraîner le levier; on peut s'opposer à cet entraînement en plaçant un poids convenable dans le plateau.

Fig. 1.



Pour faire un essai, on suspend l'action de toutes les résistances qui agissent sur la machine pendant sa marche ordinaire; on amène la machine à sa vitesse de règle en augmentant ou en diminuant le serrage, et l'on maintient le levier en plaçant un poids convenable dans le plateau; il est clair que, en considérant un intervalle de temps tel que la vitesse initiale de la machine soit exactement la même que la vitesse finale, le travail moteur transmis à l'arbre O pendant ce temps, déduction faite des frottements dans les coussinets, est exactement égal au travail résistant développé par l'action des mâchoires sur la jante de la poulie, travail qu'il est facile d'évaluer. En effet, soient :

P le poids placé dans le plateau augmenté du poids de ce plateau et de son attache ;

l la distance de l'axe de l'arbre à la verticale qui passe par le crochet de suspension, pour la position qu'a le levier pendant l'expérience;

p le poids du frein ;

q la distance de l'axe de l'arbre à la verticale qui passe par le centre de gravité du frein;

R le rayon de la poulie du frein ;

ΣF la somme des composantes tangentielles de toutes les actions des mâchoires sur la poulie.

En prenant les moments par rapport à l'axe de toutes les forces qui agissent sur le frein,

$$\Sigma \mathrm{FR} = \mathrm{P}l + pq,$$

et si m est le nombre de tours qu'a faits l'arbre pendant le temps considéré, le travail du frottement du frein, pendant ce temps, et par suite le travail disponible transmis, sera donné par l'égalité

$$2\pi m \Sigma \mathrm{FR} = 2\pi m(\mathrm{P}l + pq).$$

Si nous représentons par n le nombre de tours que fait l'arbre par seconde, le travail moyen en chevaux aura pour expression

$$\mathrm{T} = 2\pi n \frac{(\mathrm{P}l + pq)}{60 \times 75}.$$

Conditions d'application de la formule.

Constance de la vitesse. — Pour établir cette formule, nous supposons, en premier lieu, que la vitesse de la machine à la fin de l'essai soit exactement la même qu'au commencement, et en second lieu que, pendant toute la durée de l'essai, le levier du frein reste immobile. La première condition peut toujours être réalisée par des tâtonnements préalables : on augmente successivement le serrage et la charge du plateau jusqu'au moment où le mouvement de la machine ne s'accélère plus. Si, dans une expérience, on trouve qu'il y a eu ralentissement ou accélération, il faut conclure que le poids placé dans le plateau était trop fort ou trop faible ; il devient alors nécessaire de recommencer l'essai. Si l'on ne veut pas le perdre entièrement, on peut ajouter ou retrancher des poids à un certain moment, de manière à ramener la vitesse à ce qu'elle était à l'origine, en ayant soin de noter le nombre de tours faits par la machine sous chaque charge; on arrive ainsi à une estimation du travail moyen transmis.

Dans les essais industriels, il importe que la vitesse finale soit égale à la vitesse initiale; toute variation de la force vive de la machine introduirait en effet une erreur dans l'évaluation du travail moteur qui ne

8.

serait plus égal au travail mesuré par le frein. Une autre considération, bien plus importante dans beaucoup de cas, exige la constance absolue de la vitesse pendant l'essai; si cette vitesse est variable, on ne détermine plus, ainsi qu'on se le propose en général, le coefficient d'effet utile de la machine pour une marche normale déterminée, mais un coefficient moyen pour toutes les marches comprises entre celles qui correspondent aux vitesses extrêmes de la machine pendant l'essai. Ordinairement les coefficients d'effet utile varient assez rapidement avec la vitesse de la machine motrice, et l'on s'exposerait souvent à des erreurs très-graves si l'on considérait le coefficient moyen obtenu dans une marche variable comme le coefficient correspondant réellement à la vitesse moyenne pendant l'essai.

Pour ces motifs, il importe de s'assurer que la vitesse à la fin de l'expérience est exactement la même qu'au commencement et qu'elle ne varie pas sensiblement dans l'intervalle; cette vérification se fait en comptant, avec l'aide d'une bonne montre à secondes, le nombre de tours faits par la machine pendant une minute au moins, au commencement et dans le courant de l'essai; on doit terminer celui-ci en un moment pour lequel l'égalité des vitesses initiale et finale a été constatée directement; le nombre total de tours faits par la machine pendant l'essai est inscrit par un compteur.

Durée de l'essai. — Il résulte de ce qui vient d'être dit qu'il est nécessaire de prolonger l'essai pendant une certaine durée que nous évaluons à une dizaine de minutes au moins; en effet, on commet, dans tout comptage de nombre de tours, une erreur d'une fraction plus ou moins grande de révolution; il serait difficile, si l'essai était trop court, de s'apercevoir d'une variation de la vitesse de la machine, ce qui exposerait aux inconvénients que nous venons de signaler; d'un autre côté, l'erreur commise sur le nombre total de tours a une influence d'autant plus grande dans l'appréciation du travail que ce nombre de tours est plus faible, que l'essai a duré moins longtemps.

Pour définir la valeur industrielle d'une machine à vapeur, il faut compléter l'essai au frein par un essai de combustible, ayant pour but de faire connaître la quantité de charbon brûlée par heure et par force de cheval. Un tel essai présente des incertitudes assez grandes

provenant de la mise à feu et de la période d'arrêt de la machine; pour arriver à des résultats concluants, il faut donc que ces erreurs possibles soient réparties sur un temps très-long, qui doit être au moins de six à huit heures.

Production des oscillations. — La théorie du frein exposée plus haut suppose que le levier est immobile pendant toute l'expérience. Or il n'est pas possible de maintenir le levier dans une position invariable pendant un temps aussi long; le frottement du frein sur la poulie, malgré toutes les précautions qu'on peut prendre, ne reste pas constant, en sorte que, sous l'action de ce frottement, de la charge du plateau et du poids du frein, le levier s'élève ou s'abaisse, et pour le ramener à sa position première on est obligé d'augmenter ou de diminuer le serrage à l'aide des écrous.

Pour la sécurité et pour la possibilité même des essais, il est nécessaire de limiter les excursions du frein au-dessous et au-dessus de sa position normale, que nous supposons dans la suite être la position horizontale; on arrive à ce résultat en établissant deux arrêts solides, tels que de fortes traverses en charpente, contre lesquelles vient butter le levier à la limite des plus grandes oscillations que l'on veut lui permettre. Cette précaution est nécessaire, parce que, au commencement de l'essai, il est ordinairement très-difficile de maintenir le frein; les impulsions parfois violentes qu'il reçoit feraient tomber les poids, pourraient entraîner tout le système et être la cause d'accidents sérieux pour les expérimentateurs; enfin, pendant le courant de l'essai même, une simple inattention de l'opérateur, une fausse manœuvre donneraient lieu aux mêmes inconvénients.

Dans toute expérience, le levier occupera donc des positions variables d'un instant à l'autre et sera tantôt au-dessous, tantôt au-dessus de l'horizontale; ces oscillations seront irrégulières et leur amplitude dépendra de la promptitude que l'on mettra à y remédier par la variation du serrage; la volonté de l'opérateur joue ici un grand rôle, car celui-ci peut, en serrant plus ou moins, maintenir constamment le levier au-dessus ou au-dessous de sa position normale. Or, quelles que soient les irrégularités qui se présentent, on ne peut pas en tenir compte dans le calcul du résultat, et l'on admet, dans l'estimation de la puis-

sance de la machine, que le travail du frottement est toujours mesuré par l'expression

$$2\pi m(Pl + pq),$$

dans laquelle on substitue à P la charge réelle du frein pendant l'expérience, et à l et pq les valeurs qu'ont ces quantités, lorsque le levier est parfaitement horizontal.

Influence des oscillations. — Nous allons rechercher les précautions qu'il faut prendre pour que le mode d'opérer auquel on est astreint ne donne lieu à aucune erreur.

Il est évident d'abord que si, pendant les oscillations du levier, les moments Pl et pq sont sujets à des variations, les résultats obtenus seront nécessairement incertains et conduiront à des estimations différentes suivant que le levier sera resté plus longtemps dans telle ou telle position. Il faut donc, avant tout, que ces moments soient invariables pendant la durée de l'essai. Nous indiquerons plus loin quelles mesures il faut prendre à cet égard; admettons que la condition soit remplie et recherchons l'influence que, dans cette hypothèse, les oscillations peuvent avoir sur l'évaluation du travail.

Supposons que, à un certain instant, le moment du frottement l'emporte sur celui de la charge, le levier sera soulevé, et si ω représente sa vitesse angulaire, Σmr^2 son moment d'inertie par rapport à l'axe, y compris celui de la charge, on aura en chaque instant

$$\Sigma FR = Pl + \frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2.$$

Désignons par a l'angle que fait, à un instant quelconque, avec une droite fixe menée par le centre de la poulie, un rayon passant par un point déterminé A de cette poulie, par a' l'angle que fait avec la même droite fixe la ligne qui joint le centre à un point B du levier; le travail élémentaire du frottement sera égal au produit du moment ΣFR par le déplacement angulaire du levier du frein par rapport à la poulie. Celui-ci se compose de l'angle $d\alpha$ décrit par le point A de la poulie diminué de l'angle $d\alpha'$ décrit par le point B du levier, par suite de son mouvement d'ascension. Pendant que le levier passe d'une position définie par un angle a'_1 à une autre position définie par l'angle a'_2, l'angle a

décrit par le point A de la poulie passe de la valeur a_1 à la valeur a_2, et le travail total du frottement, pendant ce temps, est donné par l'expression

$$Pl(a_2-a_1)-Pl(a'_2-a'_1)-\Sigma mr^2\int_{a'_1}^{a'_2}\frac{d\omega}{dt}\,da'+\Sigma mr^2\int_{a_1}^{a_2}\frac{d\omega}{dt}\,da.$$

Ou bien, en remarquant que $\frac{da'}{dt}=\omega$,

$$Pl(a_2-a_1)-Pl(a'_2-a'_1)-\tfrac{1}{2}\Sigma mr^2(\omega_2^2-\omega_1^2)+\Sigma mr^2\int_{a_1}^{a_2}\frac{d\omega}{dt}\,da.$$

Si, après avoir exécuté une ascension, le levier revient à sa position première, le travail du frottement, pour cette nouvelle course, sera représenté par une expression analogue; faisons la somme des travaux du frottement pour une oscillation complète, le premier terme deviendra PlA, A étant l'angle total décrit par la poulie, le deuxième et le troisième disparaîtront; quant au quatrième, nous remarquerons que $\frac{da}{dt}$ est la vitesse angulaire Ω de l'arbre de la machine qui, ainsi qu'on l'a exposé plus haut, doit être sensiblement constante pendant tout l'essai, et dont, par suite, les variations pendant une oscillation du frein sont complétement négligeables; la valeur de

$$\Sigma mr^2\int_{a_1}^{a_2}\frac{d\omega}{dt}\,da$$

est donc égale à

$$\Sigma mr^2\Omega(\omega_2-\omega_1),$$

qui devient nulle pour chaque excursion.

Il résulte de là que, quelles que soient les variations de serrage ou de desserrage dans le cours d'un essai fait avec un frein équilibré, le travail développé par le frottement sera représenté par le produit APl, qui, d'après nos notations, équivaut à $2\pi mPl$, c'est-à-dire par la quantité qu'on évalue effectivement dans tout essai. Remarquons toutefois que, pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'il n'y ait aucune perte de force vive du levier à l'extérieur; par suite, dès qu'il y a choc du levier contre les arrêts, l'essai devient inexact.

Dans tout ce qui précède, on n'a tenu aucun compte de l'effort que

doit faire l'opérateur pour serrer ou desserrer le frein; cet effort, qui, ainsi que nous le verrons plus loin, est ordinairement très-considérable, varie, pendant l'opération, en intensité et en direction; pour que ces actions n'aient pas d'influence sur le mouvement du frein et ne compromettent pas par suite l'exactitude des résultats, le mode de serrage des écrous doit être disposé de telle sorte que le moment de l'effort nécessaire pour les faire tourner dans un sens ou dans l'autre, par rapport à l'axe de rotation, soit constamment nul.

Conditions d'exactitude de l'essai. — Les considérations précédentes nous ont fait connaître que, pour qu'un essai au frein donne des résultats exacts, il faut, indépendamment de la condition relative à l'égalité des vitesses initiale et finale qui a été examinée plus haut :

1° Que le moment, par rapport à l'axe de rotation, du poids propre du frein, celui de la charge et celui des efforts nécessaires pour le serrage et le desserrage restent constants dans les différentes positions que peut prendre le levier pendant ses oscillations;

2° Que par suite de ces oscillations le frein ne vienne jamais rencontrer les arrêts fixes.

Nous allons examiner en détail les précautions qu'il convient de prendre pour que ces deux conditions soient remplies dans les expériences.

Moyens pratiques à employer pour assurer la constance des moments des forces.

Moment de la charge. — Pour rendre constant le moment de la charge du frein, on attache le plateau au levier à l'aide d'une courroie qui passe sur un arc en fer ayant pour centre celui de l'arbre; d'après la Notice de M. de Saint-Léger, ce correctif a été employé pour la première fois par M. Fourneyron; il est appliqué aux freins décrits plus loin (*fig.* 4, 6 et 7).

Moment du poids du frein. Tare. — Le moment du poids propre du frein ne peut être rigoureusement constant pour toutes les positions que si l'appareil est équilibré autour de l'axe de rotation; c'est le cas

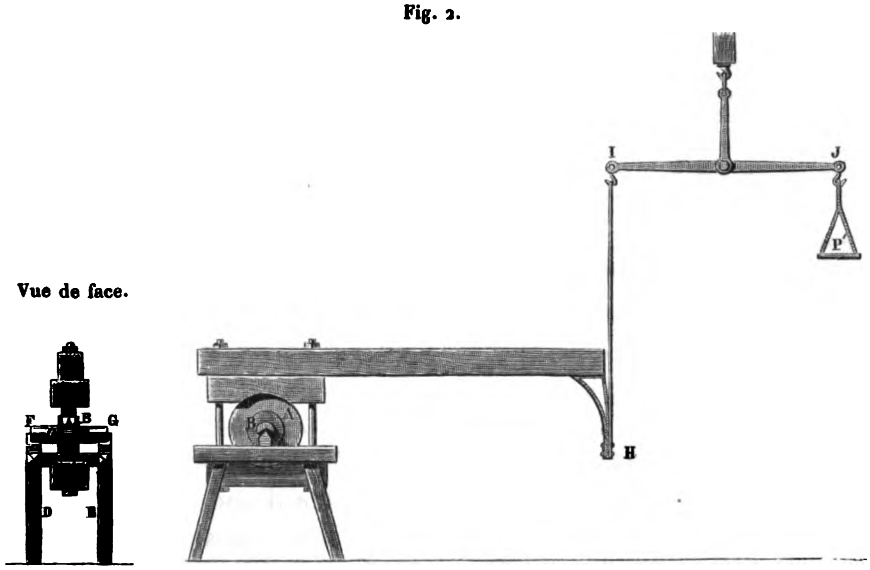
du frein de Prony (*fig.* 3) et du frein circulaire (*fig.* 7). Lorsque le centre de gravité de l'appareil se trouve sur l'horizontale de l'axe, ainsi que cela a lieu pour les freins à deux barres parallèles (*fig.* 5 et 6), les variations du moment du poids deviennent complétement négligeables pour les amplitudes ordinaires des oscillations, et l'on arrive au même degré d'exactitude qu'avec les freins équilibrés.

Il est nécessaire de déterminer exactement ce moment qui, ainsi que nous l'avons vu, doit être pris en considération dans le calcul du travail. Voici comment on opère :

On construit un disque en bois A (*fig.* 2) ayant exactement le dia-

Fig. 2.

Vue de face.



mètre de la poulie du frein; sur chaque face du disque est fixée une rondelle en fer B, percée d'une ouverture centrale O, dans laquelle passe un cylindre en acier FG évidé dans le bas, par lequel l'ensemble peut reposer sur des couteaux placés sur les supports D et E. On équilibre le disque autour de son axe, puis on monte sur lui le frein que l'on serre de manière à l'amener exactement dans la position moyenne qu'il doit occuper sur la poulie pendant l'essai, et on le maintient dans cette position à l'aide de cales.

A une certaine distance au-dessus du frein est établi un fléau de ba-

lance dont l'une des extrémités I se trouve sur la direction de la tangente verticale à l'arc qui est fixé sur le levier; on accroche une courroie d'un côté à cette extrémité I, de l'autre à la partie inférieure H de l'arc du levier; on enlève les cales et l'on détermine le poids P' qu'il faut suspendre à l'autre bout J du fléau pour maintenir le frein dans sa position normale.

On connaît ainsi le moment pq du poids du frein par rapport à l'axe; il est égal à $P'l$. Le poids P' se nomme *tare du frein*.

Pour que la détermination de la tare se fasse dans de bonnes conditions, il faut que le frein disposé sur le disque, comme il vient d'être dit, soit dans la condition d'une balance parfaitement sensible, et c'est ce qui arrive en effet quand, ainsi que nous le supposons, le centre de gravité de l'appareil est sur l'horizontale de l'axe. Avec les précautions que nous venons d'indiquer, un frein du poids de 700 kilogrammes peut être taré à 200 grammes près.

Quand on veut avoir recours à un appareil équilibré autour de son axe, on fait une opération analogue, à titre de vérification; si l'équilibre n'existe pas pour toutes les positions, on corrige les inégalités par l'addition de lames de plomb convenablement réparties.

Lorsque le centre de gravité du frein ne tombe pas sur l'horizontale de l'axe, ainsi que cela arrive pour les freins ordinairement employés, la tare ne peut plus être obtenue avec la même précision; en opérant comme il vient d'être dit, c'est-à-dire en prenant le moment du poids par rapport à l'axe de l'arbre, ainsi que l'exige l'application rigoureuse de la formule, on met le frein dans la position d'une balance folle ou d'une balance paresseuse. Pour faire une bonne pesée, on est alors conduit à placer le couteau, non plus au centre du disque, mais en un point de la verticale passant par ce centre situé sur l'horizontale du centre de gravité de l'appareil; cette opération est délicate, et la tare qui n'est pas obtenue par rapport à l'axe de rotation réel ne présente aucune garantie d'exactitude. C'est, à notre avis, un des plus graves inconvénients des freins ordinairement employés. Dans les essais industriels, on se préoccupe peu, en général, de la position du centre de gravité du frein pendant le tarage; on se contente de faire reposer l'appareil sur un couteau placé sous la mâchoire supérieure; la sensibilité à laquelle on arrive varie ainsi suivant la disposition du frein

et devient souvent tout à fait insuffisante. C'est en se trouvant en présence de pareils inconvénients que M. Demondesir a eu l'idée de monter le frein sur un disque en bois, ainsi que nous l'avons expliqué plus haut.

En général on détermine la tare avant de faire les essais: cette opération préalable est nécessaire pour permettre de régler convenablement la position du centre de gravité; mais si l'on tient à une mesure exacte, il est indispensable de refaire la tare immédiatement après le dernier essai. Pendant l'expérience même, le frein est fortement mouillé, et l'eau ainsi ajoutée aux mâchoires et à une partie des leviers peut apporter des modifications notables à la tare.

Moment de l'effort nécessaire pour le serrage. — Le moment des efforts à exercer sur les écrous pour produire le serrage ou le desserrage doit être constamment nul; cette condition se trouve remplie quand les efforts agissent toujours dans un plan qui passe par l'axe de l'arbre, elle est remplie également quand l'action se compose d'efforts égaux agissant en sens inverse l'un de l'autre aux deux extrémités d'une clef double montée sur l'écrou; mais il est évident que la volonté de l'opérateur peut jouer un grand rôle, et introduire des forces inutiles pour le serrage et nuisibles à l'exactitude des résultats, en augmentant ou en diminuant l'action de la charge du frein. Pour que l'appareil fût à l'abri de toute critique, il faudrait que l'introduction de pareilles forces fût rendue impossible par la disposition même des écrous et des clefs de serrage, ce qui ne serait pas irréalisable dans la pratique; mais on peut se contenter d'adopter une disposition qui permette de faire le serrage sans altérer la charge du frein. Une telle disposition suffit d'autant plus en général que, dans tout essai bien fait, le frottement est maintenu sensiblement constant, à l'aide des mesures que nous indiquerons plus loin, en sorte qu'il n'est nécessaire de toucher aux appareils de serrage que par intervalles.

Moyens à employer pour limiter les oscillations.

Lorsqu'un essai est arrivé à sa marche normale, que le levier a été amené dans la position horizontale par un serrage et une charge con-

venables, la seule cause qui puisse lui faire prendre un mouvement est une variation dans le frottement des mâchoires contre la poulie; quand le mouvement a commencé, il ne peut être arrêté, et le frein ne peut être ramené à sa position normale que par une modification dans le serrage.

Pour qu'un essai puisse se faire dans de bonnes conditions, il faut donc :

1° Que le frottement reste sensiblement constant; on évite ainsi la production des oscillations, ou du moins on en diminue l'énergie;

2° Que la manœuvre des écrous se fasse sans grand effort et soit disposée commodément pour l'action de l'opérateur;

3° Que la vitesse des oscillations soit rendue assez petite pour que le serrage ou le desserrage puisse toujours être effectué avant que le levier ne rencontre les arrêts fixes.

Frottement et serrage. — La réalisation des deux premières conditions constitue la véritable difficulté des essais au frein; l'impossibilité de les remplir d'une manière satisfaisante, quand il s'agit de mesurer un travail considérable, a toujours été un obstacle à des essais sérieux faits, avec le frein de Prony, sur des machines très-puissantes.

Pour obtenir la constance du frottement, on se sert d'une poulie à jante tournée, parfaitement centrée sur l'axe; les surfaces frottantes sont maintenues, pendant toute la durée de l'essai, à la même température et dans le même état de lubrifaction. Pour que, avec un appareil donné, l'effort nécessaire au serrage soit réduit au minimum, il faut que le coefficient de frottement soit augmenté autant que possible; ce serait donc un grand progrès de trouver un enduit qui rendît ce coefficient à la fois grand et régulier. On arrive à une régularité parfaite, et l'on évite en même temps l'échauffement des surfaces frottantes, en arrosant la poulie et les mâchoires d'eau pure; mais, ainsi que l'a constaté M. Demondesir dans des expériences précises faites avec un frein spécial (*fig.* 6), à l'aide duquel des lames de ressort permettaient d'évaluer la pression, le coefficient de frottement des mâchoires sur la poulie descend avec ce mode de lubrifaction à environ $0^m,05$. C'est donc dans la disposition propre des écrous de serrage qu'il faut chercher la solution de la difficulté. Nous indiquerons

plus loin les dispositions diverses qui ont été essayées à cet égard, et nous signalerons celles qui ont déjà donné des résultats importants. Nous nous bornerons à remarquer ici qu'il sera toujours très-avantageux de donner à la poulie du frein la plus grande dimension possible, et que, si l'on doit opérer sur une machine munie d'un volant tourné, servant de poulie de transmission, circonstance qui se rencontre fréquemment aujourd'hui, il ne faut jamais renoncer à cette précieuse ressource pour l'essai au frein.

Moyen de ralentir les oscillations. — Quelque facile que soit la manœuvre des écrous, elle exige toujours un certain temps avant d'arrêter le mouvement du levier du frein; il faut donc que les oscillations soient rendues assez lentes pour permettre d'exécuter cette manœuvre avant que le levier ne vienne toucher l'un ou l'autre des deux arrêts. Or l'accélération angulaire d'un point du levier est donnée par la relation

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma \mathrm{FR} - \mathrm{P}l}{\Sigma mr^2},$$

dans laquelle $\mathrm{P}l$ est une constante; le seul moyen de ralentir les oscillations est donc de donner une valeur suffisamment grande au moment d'inertie de l'appareil; à ce point de vue, il y a avantage à éloigner le plateau le plus possible de l'axe de rotation.

Stabilité du frein. — Dans le cas où l'on emploie un frein non équilibré et dans lequel le moment de la charge ne reste pas constant, on peut disposer le système de telle sorte que, s'il y a augmentation ou diminution du moment du frottement, les moments de la charge et du poids du frein varient en sens inverse et éteignent ainsi les oscillations; c'est ce qui arrive lorsque le centre de gravité de l'appareil se trouve au-dessous de l'horizontale passant par l'axe et que le plateau est suspendu à un levier également placé au-dessous, sans que l'on ait recours à un arc de cercle pour maintenir la constance du moment de la charge. On obtient de cette manière une grande stabilité de l'appareil; mais, par cela même, on s'expose à des erreurs, ainsi que nous l'avons montré plus haut, erreurs qui, à la vérité, peuvent être faibles dans certains cas, mais qui n'en existent pas moins en principe et qui peuvent prendre

souvent une importance capitale; on a fait voir que ces dispositions conduisent en outre à d'autres incertitudes non moins grandes dans l'opération du tarage du frein.

Un appareil construit dans les conditions d'exactitude rigoureuse que nous avons indiquées se mettra en mouvement sous l'influence de la moindre variation du frottement, et il sera nécessaire, chaque fois, de faire varier le serrage pour ramener le levier à sa position horizontale. Les essais ainsi dirigés exigent beaucoup de soins, mais ils conduisent du moins à des résultats certains; j'ai tenu à m'assurer, par une expérience directe, de la possibilité pratique de ce mode d'opérer, et je puis affirmer n'avoir rencontré aucune espèce de difficulté par l'emploi d'un frein circulaire équilibré. Néanmoins il est utile de remarquer que, dans des essais d'une certaine durée, il peut se présenter de légères variations de frottement, se produisant pendant un temps très-court, se compensant en partie pendant la marche, et d'importance assez minime pour n'avoir aucune influence appréciable sur les résultats; il peut être avantageux de disposer l'appareil de telle sorte que, pour ces faibles variations, la manœuvre de l'écrou devienne inutile; on arrivera à ce résultat en ajoutant au frein, préalablement équilibré, un poids supplémentaire placé dans la verticale passant par l'axe de rotation, au-dessous de cet axe; il sera facile, dans chaque cas, de calculer ce poids de telle sorte que l'erreur maxima qui peut en résulter soit une fraction de cheval aussi faible qu'on peut le désirer. Ce poids additionnel devra naturellement varier suivant l'importance de la machine que l'on veut essayer, car il faut bien remarquer que l'erreur qui peut résulter de ce que le centre de gravité de l'appareil est au-dessous de l'axe ne dépend que de la vitesse de la poulie et du moment de poids du frein par rapport à l'axe de l'arbre, et nullement de la grandeur du travail que l'on veut mesurer.

Conclusions.

Nous concluons de l'étude à laquelle nous venons de nous livrer :

1° Que, pour faire un essai au frein dans des conditions d'exécution facile, il faut, avant tout, prendre toutes les mesures nécessaires pour assurer l'uniformité du frottement et la facilité du serrage;

2° Que pour obtenir des résultats exacts il faut se servir d'un appareil équilibré ou dont le centre de gravité soit sur l'horizontale de l'axe, et dans lequel la charge agisse toujours à une distance constante de cet axe;

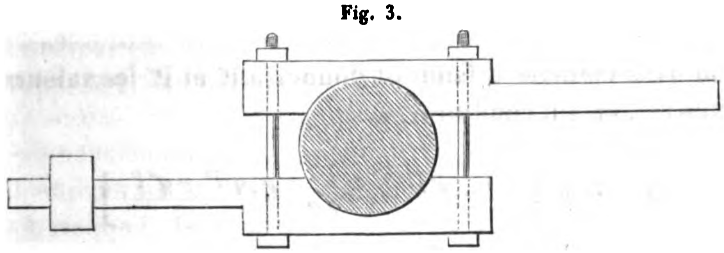
3° Que, lorsque cette dernière condition n'est pas remplie, l'approximation des résultats obtenus est d'autant plus faible que les variations des moments de la charge et du poids du frein sont plus grandes pendant les oscillations du levier; que, par suite, toutes les dispositions dans lesquelles on obtient la stabilité de l'appareil à l'aide de variations de ce genre doivent être rejetées, quand il s'agit d'évaluations exactes.

Les notions qui précèdent nous permettront d'apprécier les avantages et les inconvénients des divers modèles de freins qui sont employés ordinairement.

EXAMEN DE DIVERS SYSTÈMES DE FREINS.

Frein ordinaire à levier supérieur ou inférieur. — Le frein primitif de Prony est représenté par la *fig.* 3, qui est la reproduction fidèle de

Fig. 3.



celle du Mémoire de l'inventeur. L'appareil est équilibré, mais le moment de la charge est variable avec la position du levier; on a depuis longtemps renoncé à cette disposition qui était parfois très-gênante pour l'installation, et l'on a adopté généralement la disposition de la *fig.* 1, page 58, dans laquelle la mâchoire inférieure est souvent remplacée par une série de voussoirs maintenus par une bande en fer. Cet appareil n'est pas équilibré et le moment de la charge est variable, ce qui, dans certains cas, peut conduire à des erreurs assez considérables, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte.

Si le levier restait horizontal pendant tout l'essai, le travail serait exactement donné par l'expression

$$2\pi n(Pl + pq);$$

si le frein était maintenu pendant tout le temps près de l'arrêt supérieur ou près de l'arrêt inférieur, il faudrait mettre dans le plateau des poids P′ ou P″ différents du premier et dont les valeurs seraient données par les égalités

$$Pl + pq = P'l' + pq' = P''l'' + pq'', \tag{1}$$

dans lesquelles l', q', l'', q'' représentent les longueurs exactes des bras de levier dans ces positions extrêmes; l'expression prise pour la mesure du travail serait donc

$$2\pi n(P'l + pq) \quad \text{ou} \quad 2\pi n(P''l + pq);$$

en sorte que la différence entre les deux résultats extrêmes que l'on peut obtenir est

$$D = 2\pi nl(P' - P''),$$

expression dans laquelle il faudrait donner à P′ et P″ les valeurs tirées des égalités (1), ce qui conduirait à

$$D = 2\pi nl\left[\frac{(Pl + pq)(l'' - l') - p(q'l'' - q''l')}{l'l''}\right]. \tag{2}$$

Supposons, pour faire une application, que la poulie du frein ait $1^m,50$ de diamètre, que le plateau soit placé à une distance $l = 1^m,50$ de l'axe; admettons de plus que le levier soit disposé au-dessous de l'arbre, ce qui mettrait le crochet à environ $1^m,25$ au-dessous de l'horizontale de l'axe, dans la position moyenne; permettons des oscillations de 3 degrés de chaque côté de la ligne qui joint le crochet de suspension au centre; c'est là un minimum qu'il est souvent difficile d'atteindre : un frein dans ces conditions pèserait environ 200 kilogrammes, en y comprenant les fers et appareils de serrage, et son centre de gravité serait très-voisin de la verticale de l'axe; supposons-le à environ

$0^m,55$ du centre de rotation, on trouverait très-approximativement, d'après ces données,

$$l = 1,50, \qquad q = 0,06,$$
$$l' = 1,44, \qquad q' = 0,03,$$
$$l'' = 1,56, \qquad q'' = 0,09,$$
$$p = 200.$$

La substitution de ces valeurs dans l'expression (2) nous donne, pour la différence totale entre les résultats extrêmes,

$$D = 2\pi n\left[(Pl + pq)\frac{1}{12,5} + 11,09\right].$$

On pourrait donc, dans les hypothèses indiquées plus haut, trouver des mesures différant environ du treizième de la force totale augmenté d'une quantité qui dépend de la vitesse de la machine et qui serait voisine d'un cheval pour une vitesse de 60 tours à la minute. On est obligé souvent d'opérer sur des arbres qui font jusqu'à 150 tours à la minute; la deuxième partie de l'erreur possible dépasserait alors deux chevaux.

Dans le cas où l'on se servirait du même appareil renversé, c'est-à-dire où l'on placerait le levier au-dessus de l'arbre, l'erreur possible serait ordinairement un peu diminuée, parce que le crochet serait plus rapproché de l'horizontale de l'axe; on trouverait alors

$$l = 1,50, \quad l' = 1,45, \quad l'' = 1,54,$$

et

$$D = 2\pi n\left[(Pl + pq)\frac{1}{16,5} + 11,30\right].$$

Il est évident que, dans l'un et l'autre cas, l'erreur augmente avec le rayon de la poulie du frein, et diminue à mesure que le point de suspension s'éloigne de l'axe.

Si donc on veut se servir du système imparfait que nous venons de décrire, il y a avantage, au point de vue de l'erreur possible, à disposer le levier sur la mâchoire supérieure, et surtout à donner une assez grande longueur à ce levier; il faut remarquer pourtant que, quand le système a la première des deux dispositions que nous venons d'indiquer, c'est-à-dire quand le levier est en dessous, l'appareil est plus

stable; lorsqu'il se produit une variation dans le frottement, le levier peut prendre une nouvelle position d'équilibre sans que l'opérateur soit obligé de manœuvrer les écrous, et par suite de remettre le système dans la position normale, tandis que, dans le deuxième cas, dès qu'une oscillation est commencée pour un motif quelconque, les moments des forces varient de manière à accélérer le mouvement, en sorte que, si l'on ne veut pas toucher les arrêts, il faut immédiatement manœuvrer les écrous. Cette deuxième disposition est donc moins commode que la première, mais elle a l'avantage d'exiger une attention continuelle de la part de l'opérateur qui se trouve obligé ou de corriger immédiatement les variations qui se produisent, ou de laisser manquer l'essai; quoique cette manière d'opérer soit plus difficile, qu'elle exige plus de soins, plus d'attention et des dispositions permettant un serrage plus facile, elle offre bien plus de garanties d'exactitude que la première.

Aux causes d'erreurs considérables que nous venons de signaler pour le système qui nous occupe, il faut en ajouter une autre non moins importante provenant de la tare. Nous avons indiqué les précautions qu'il faut prendre à ce sujet, et la difficulté sérieuse que l'on rencontre dans le cas actuel, où il n'est pas possible d'obtenir le moment du poids du frein par rapport à l'axe réel de rotation pendant l'essai. Il faut ajouter qu'avec ce genre d'appareils la tare varie pendant l'expérience, parce que l'eau vient imprégner les mâchoires et une partie du levier.

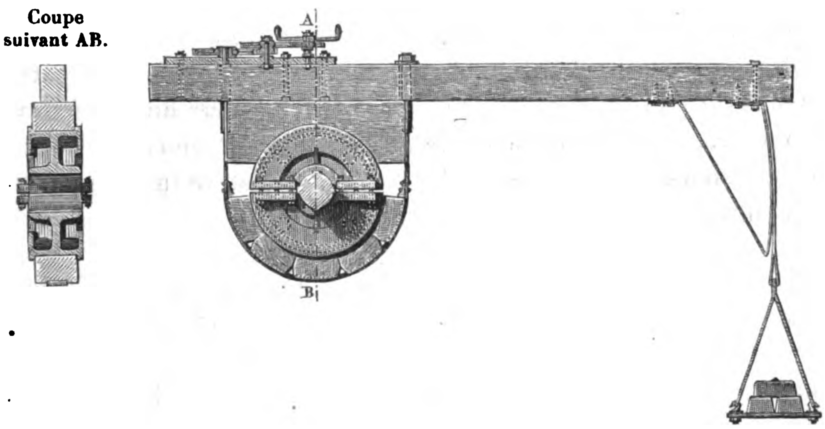
Dans cette sorte de frein, qui est la plus répandue dans l'industrie, on produit ordinairement le serrage en agissant directement sur l'un ou l'autre des deux écrous à l'aide d'une grande clef. La manœuvre est très-dure et souvent il faut plusieurs hommes pour l'exécuter; le serrage et le desserrage ne peuvent guère se faire sans imprimer des secousses au frein; en tout cas, l'effort appliqué sur le levier de l'écrou tend à faire tourner le frein autour de l'arbre dans un sens ou dans un autre, et l'on introduit ainsi forcément de nouvelles incertitudes dans l'essai.

Freins en usage dans le Service des Tabacs. — En 1852, M. Rolland, qui, dans des expériences faites antérieurement à Lyon, avait reconnu

tous les inconvénients du système dont nous venons de parler, employa le frein représenté *fig.* 4, auquel le constructeur, M. Farcot, confiant

Fig. 4.

Coupe suivant AB.

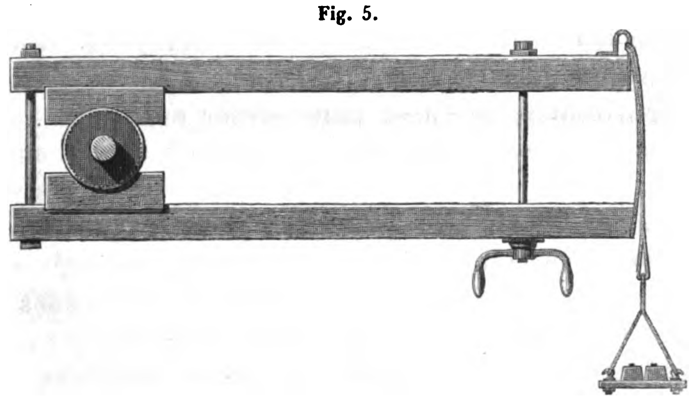


dans la valeur de ses machines, n'avait pas craint d'appliquer une partie des perfectionnements indiqués dans la Note de M. de Saint-Léger. Le moment de la charge est maintenu constant à l'aide d'un arc en fer, mais le frein n'est pas équilibré, et le centre de gravité se trouve audessus de l'horizontale de l'axe; toute erreur n'est donc pas rendue impossible par ce système; cependant les résultats obtenus ont été très-satisfaisants, ce qui tient au soin que l'on a mis à éviter les variations du frottement, et à la facilité du serrage par la disposition adoptée. Cette manœuvre s'effectue à l'aide d'une clef double qui agit sur l'écrou par une série de roues et de pignons, suivant les indications de M. de Saint-Léger. Il faut dire toutefois que l'effort du serrage est plus grand que ne semble l'indiquer le rapport des roues d'engrenage; cela tient à la production de frottements très-considérables dans ces organes qui sont constamment mouillés pendant l'essai, et probablement aussi à un défaut de rigidité complète des petits arbres des renvois qui, n'étant maintenus que par une extrémité, sont exposés à se fausser et à donner naissance à des arc-boutements; ces inconvénients seraient considérablement réduits si, au lieu d'une plaque unique de fixation, on établissait, sur le levier, une caisse en fonte recevant sur ses deux faces horizontales les deux extrémités des arbres des roues.

La poulie du frein qui était creuse, de manière à pouvoir recevoir un jet d'eau destiné à prévenir l'échauffement de l'appareil, avait $0^m,83$ de diamètre; elle était montée sur un arbre qui faisait en moyenne 55 tours par minute; dans ces conditions, M. Rolland a mesuré avec précision des travaux de vingt-cinq chevaux, et le frein a été maintenu sensiblement horizontal pendant onze heures. Le même frein a été employé plus tard à la Manufacture de Paris; monté sur un arbre qui faisait 85 tours, il a mesuré facilement des forces de cinquante chevaux, et dans plusieurs expériences ce chiffre a pu être élevé jusqu'à soixante-quinze chevaux.

Frein à deux leviers parallèles. — Le frein que nous venons de décrire laisse encore à désirer sous le rapport du serrage et sous celui de la position de son centre de gravité. En 1860, à l'occasion de la réception des machines de la Manufacture de Lille, M. Rolland chercha à éviter ces deux inconvénients, et fit construire, d'après les indications de M. le général Poncelet, le frein représenté *fig.* 5. Les deux mâchoires

Fig. 5.

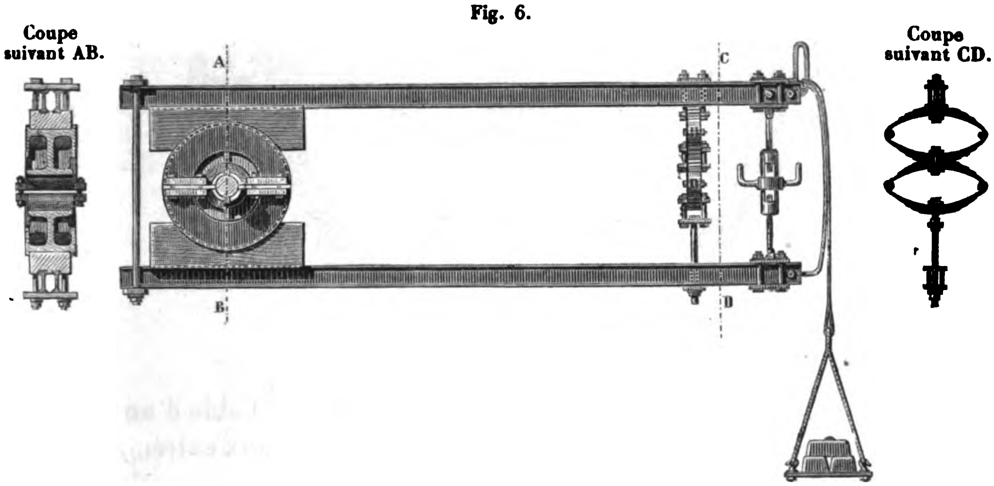


en bois sont maintenues par deux leviers parallèles qui se prolongent du même côté de l'arbre; ils sont solidement reliés à l'une de leurs extrémités, près des mâchoires, par un fort boulon vertical; le serrage se fait vers l'autre extrémité des leviers, à l'aide d'un écrou à clef engagé dans un boulon vertical qui traverse les deux pièces; le plateau est suspendu à l'aide d'une courroie qui passe sur un arc en fer réunissant les bouts des barres.

Ce frein, dont le centre de gravité est sur l'horizontale de l'arbre, donne la même exactitude qu'un frein équilibré; l'effort du serrage est notablement réduit; l'opérateur est commodément placé, loin des arbres tournants, à l'abri des projections d'eau, et près du plateau qui reçoit les poids. On a facilement mesuré avec cet appareil, monté sur un arbre qui faisait 140 tours par minute, une puissance de quarante-deux chevaux donnée par une machine de Woolff.

En 1861, à propos des essais de la Manufacture de Châteauroux, M. Demondesir apporta plusieurs modifications importantes à l'appareil que nous venons de décrire, dans le but de lui permettre de résister à de plus grands efforts et de mesurer des travaux plus considérables. La nouvelle disposition est représentée *fig.* 6. Les leviers en bois sont

Fig. 6.

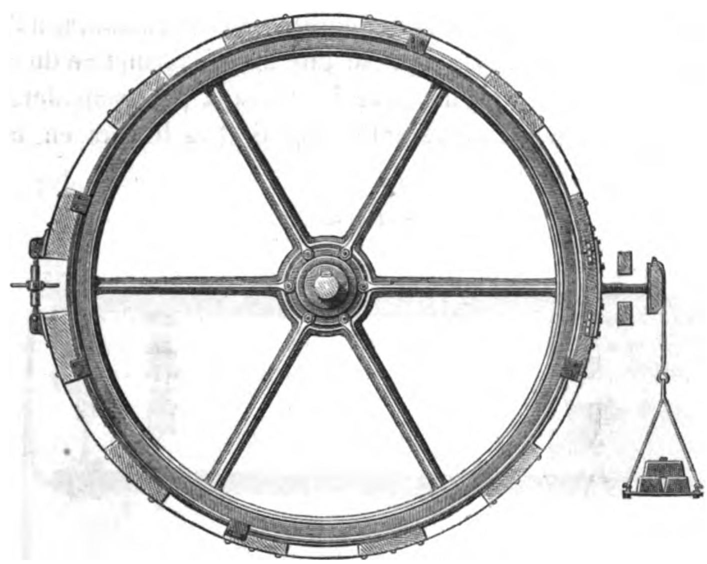


remplacés par de doubles fers à T; la flexion est ainsi diminuée et la tare reste constante pendant l'essai, malgré l'arrosage du frein. Le serrage se fait par un écrou double agissant sur deux vis de pas contraire; un double système de ressorts en acier préalablement bandés est interposé entre les deux leviers et produit le serrage nécessaire en moyenne, en sorte que l'effort qu'il faut exercer sur l'écrou, pour corriger les oscillations, devient très-faible. La poulie du frein avait $0^m,84$ de diamètre, l'arbre sur lequel elle était montée faisait 132 tours; dans ces

conditions on a mesuré jusqu'à soixante-cinq chevaux; la flexion permanente qu'ont prise les fers à T a seule empêché d'aller plus loin.

Frein circulaire. — En 1862, je me servis, pour les essais de la machine de la Manufacture des Tabacs de Paris-Reuilly, d'un frein circulaire représenté *fig.* 7. L'appareil se compose d'une série de voussoirs

Fig. 7.



en bois fixés sur une bande en fer; le serrage se fait à l'aide d'un écrou double engagé dans deux vis de pas contraire fixées aux extrémités de la bande. Le frein est équilibré par rapport à l'axe; les voussoirs sont répartis symétriquement; cette disposition a l'avantage de conserver une tare très-sensiblement constante pendant l'essai, malgré l'arrosage de la poulie, et de permettre des oscillations du levier beaucoup plus étendues que dans les autres systèmes, sans qu'il en résulte aucune erreur. Le serrage exige un effort très-faible, et le frein peut être maintenu, dans sa position moyenne, avec la plus grande facilité.

L'emploi de ce frein est particulièrement avantageux dans le cas où il peut être monté sur des poulies de grand diamètre et surtout sur des volants tournés. Le volant de la machine de Reuilly a $4^{m},20$ de dia-

mètre; j'ai mesuré sans difficulté, à une vitesse de 43 tours, des puissances variant de cinq à vingt-huit chevaux, et il m'eût été très-facile d'aller beaucoup plus au delà (¹).

En résumé, nous pouvons conclure des nombreuses expériences qui ont déjà été faites que, chaque fois que l'on ne peut employer qu'une poulie de petit diamètre, le frein le plus facile à manœuvrer, tout en donnant des résultats exacts, est le frein à barres parallèles construit par M. Rolland d'après les indications du général Poncelet, et, s'il s'agit de travaux considérables, ce frein modifié par M. Demondesir; chaque fois que l'on peut disposer d'une grande poulie et surtout d'un volant tourné, il ne faut pas hésiter à employer le frein circulaire. Les erreurs possibles avec ces divers appareils sont réduites à l'erreur commise sur la tare, qui, à l'aide des précautions que nous avons indiquées à cet égard, devient complétement négligeable.

(¹) Depuis cette époque, on a construit plusieurs freins circulaires de diverses dimensions, à l'aide desquels on a exécuté des essais sur les machines motrices des Manufactures de Tabacs de Marseille, de Nancy, de Tonneins, et sur un grand nombre de locomobiles.

ESSAI

SUR LE

DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE

DE FORME VARIABLE,

PAR M. DURRANDE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

INTRODUCTION.

Je me propose d'étudier le déplacement d'une figure dont les diverses parties peuvent se déformer suivant une loi donnée, mais telle cependant, que deux positions de la figure puissent être considérées comme deux figures homographiques. Le mouvement d'un corps solide invariable est un cas particulier de celui que je traite; celui d'un corps naturel en est un également, si l'on suppose les déformations très-petites.

Après avoir établi les formules de la transformation homographique, et les avoir adaptées au cas d'une figure limitée et pour un déplacement infiniment petit, j'exprime les paramètres généraux de la transformation en fonction de nouveaux paramètres, dont l'introduction permet de donner des notions claires du mouvement, dès que la loi de déformation est connue.

La loi de la variation de la déformation autour d'un point est donnée par une certaine surface du second degré que je nomme, à cause de cela, et pour abréger, la *déformatrice;* cette surface joue un rôle très-

important dans toute cette théorie, et c'est par rapport aux axes principaux de cette surface, pris comme axes coordonnés, que les composantes de la vitesse ont leur expression la plus simple. Je donne également la loi de la vitesse totale et de ses éléments, et leur représentation géométrique.

La discussion des expressions des vitesses composantes conduit à distinguer trois cas principaux dans le déplacement de la figure. Si le déterminant formé au moyen des coefficients des variables dans les expressions des vitesses n'est pas nul, il y a alors un point sans vitesse pendant le temps dt; je nomme ce point *centre de vitesse*. Dans ce cas, en effet, le mouvement de tout point de la figure peut être considéré comme résultant d'une déformation (dilatation ou contraction) rayonnant du centre, et d'un mouvement angulaire du rayon vecteur. Si le déterminant en question est nul, il peut se faire que les équations obtenues en égalant les vitesses composantes à zéro soient incompatibles ou rentrent les unes dans les autres. Dans le premier cas, il n'y a aucun point sans vitesse : tel est le cas du mouvement d'une figure de forme invariable; si l'une des équations est la conséquence des deux autres, il y a une ligne droite dont tous les points ont des vitesses nulles, et que je nomme *axe de vitesse*.

Après avoir donné une idée de la manière la plus simple de concevoir le mouvement infiniment petit d'un point quelconque de la figure, j'aborde la question de la déformation d'une surface; on trouve immédiatement une surface auxiliaire qui coupe la surface donnée suivant sa caractéristique, et qui n'est autre que le lieu des caractéristiques de toutes les surfaces qui, à l'instant que l'on considère, font partie d'une famille de surfaces homothétiques. Il y a, en outre, une courbe, que je nomme *courbe adjointe*, qui perce la surface proposée en tous les points dont les trajectoires sont normales à la surface, et qui convient également à toutes les surfaces homothétiques de la même famille.

L'étude particulière du mouvement d'un plan fournit un grand nombre de théorèmes remarquables, et qui ont été déjà rencontrés par M. Chasles dans son beau Mémoire sur le déplacement d'une figure invariable (1), et reproduits par différents géomètres, et notamment

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, juin 1843.

par M. Mannheim qui en a fait le point de départ d'une étude sur le déplacement d'une figure invariable assujettie à certaines conditions [1]. On remarquera une propriété assez intéressante du *foyer* (cinématique) et de la caractéristique d'un plan mobile qui, dans le cas d'une figure de forme invariable, deviennent le *foyer* et la *directrice* d'une série de coniques, lieux des points du plan mobile dont les trajectoires sont également inclinées sur la normale au plan.

Ainsi que je l'ai montré dans une Note présentée à l'Académie des Sciences [2], toutes les relations entre les vitesses des divers points d'un plan ou d'une droite me paraissent dériver très-simplement de l'expression de la vitesse estimée dans une certaine direction en fonction des composantes de la vitesse et des cosinus des angles de la direction donnée avec les axes. Cette expression, d'où l'on déduit immédiatement l'existence du *plan conjugué* et de la *droite adjointe* à la direction donnée, conduit surtout, d'une manière très-simple, à la solution de cette question, la plus importante peut-être de toute cette théorie : *Déterminer la nature et les paramètres du déplacement lorsqu'on connaît les conditions nécessaires à cette détermination.*

Je donne la solution de cette question pour le cas d'une figure de forme invariable lorsqu'on connaît les vitesses de trois points en grandeur et en direction, et, dans le cas général, lorsqu'on connaît les vitesses de quatre points.

Je considère ensuite un autre genre de conditions; je cherche les formules propres à exprimer les déformations d'une surface réglée à génératrices articulées. On a constamment sous les yeux des exemples de ce mode de déformation, et l'on pourra peut-être tirer parti de la méthode que j'indique pour étudier d'une manière beaucoup plus générale les déformations des surfaces à génératrices rectilignes.

Si j'ai tenté ce premier essai, que l'on pourra trouver un peu dénué d'intérêt au point de vue des applications de la Mécanique, et regarder comme un simple exercice géométrique, c'est que je suis de l'avis de ceux qui pensent qu'il y a tout profit à étudier à fond le mouvement indépendamment de ses causes. Je chercherai, dans un second travail,

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, XXVI[e] cahier.
[2] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 mai 1872.

s'il n'y a pas quelques conséquences intéressantes à tirer de celui-ci au point de vue de la Dynamique.

I. — *Formules de transformation.*

1. *Formules de la transformation homographique.* — Considérons une figure variable à la fois en grandeur et en position, avec cette seule restriction que deux positions quelconques se correspondent point par point, ou, en d'autres termes, que les coordonnées (ξ, η, ζ) d'un point de l'une puissent s'exprimer en fractions ayant pour termes des fonctions linéaires des coordonnées (x, y, z) du point correspondant de l'autre, et réciproquement. On aura donc les relations suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{Ax + By + Cz + D}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1}, \\ \eta &= \frac{A'x + B'y + C'z + D'}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1}, \\ \zeta &= \frac{A''x + B''y + C''z + D''}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1}. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas dont nous allons nous occuper, aucun point à distance finie (x, y, z) ne saurait correspondre à un point (ξ, η, ζ) à l'infini, ce qui exige que le dénominateur commun des valeurs de ces dernières coordonnées se réduise à une constante, sans quoi tout point situé dans le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + 1 = 0$$

correspondrait à un point (ξ, η, ζ) à l'infini.

Les formules (1) deviennent donc

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= Ax + By + Cz + D, \\ \eta &= A'x + B'y + C'z + D', \\ \zeta &= A''x + B''y + C''z + D''. \end{aligned}\right.$$

En désignant par Δx, Δy, Δz les différences $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, qui

expriment les projections du déplacement fini du point (x, y, z), il vient

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta x = (A-1)x + By + Cz + D, \\ \Delta y = A'x + (B'-1)y + C'z + D', \\ \Delta z = A''x + B''y + (C''-1)z + D''. \end{cases}$$

Les coefficients A, B, C, A',... sont des constantes quand on passe d'un point à un autre de la figure; mais ils varient avec le temps.

Comme je vais m'occuper uniquement du déplacement infiniment petit de la figure, je pose

$$\begin{array}{llll} A-1=da, & B=db, & C=dc, & D=du, \\ A'=da', & B'-1=db', & C'=dc', & D'=du', \\ A''=da'', & B''=db'', & C''-1=dc'', & D''=du''; \end{array}$$

alors les relations (3) deviennent

$$(4)\quad \begin{cases} dx = x\,da + y\,db + z\,dc + du, \\ dy = x\,da' + y\,db' + z\,dc' + du', \\ dz = x\,da'' + y\,db'' + z\,dc'' + du''. \end{cases}$$

Les considérations qui font l'objet de ce numéro ont déjà servi à M. Picart, professeur au lycée Charlemagne, de point de départ pour un travail sur le déplacement d'un solide invariable, publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (¹). J'ajouterai même que c'est la lecture de ce travail qui m'a donné l'idée de chercher les propriétés générales du mode de déformation exprimé par les formules (4).

2. *Introduction de nouvelles variables*. — Remplaçons les paramètres généraux de la transformation par d'autres qui mettent bien en évidence la relation entre la nature du mouvement et la loi de la déformation. Pour cela, soit ρ la distance qui sépare deux points (x, y, z), (x', y', z') de la figure au commencement de l'instant dt, et (α, β, γ) les angles de la direction ρ avec les axes coordonnés. On a

$$x - x' = \rho\cos\alpha,\quad y - y' = \rho\cos\beta,\quad z - z' = \rho\cos\gamma,$$

(¹) *Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. VI, p. 158.

d'où

$$dx - dx' = d\rho \cos\alpha + \rho\, d(\cos\alpha),$$
$$dy - dy' = d\rho \cos\beta + \rho\, d(\cos\beta),$$
$$dz - dz' = d\rho \cos\gamma + \rho\, d(\cos\gamma);$$

des formules (4) appliquées aux deux points (x, y, z), (x', y', z') on tirerait

$$\begin{aligned} dx - dx' &= (x - x')da + (y - y')db + (z - z')dc \\ &= \rho \cos\alpha\, da + \rho \cos\beta\, db + \rho \cos\gamma\, dc; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$d\rho \cos\alpha + \rho\, d(\cos\alpha) = \rho \cos\alpha\, da + \rho \cos\beta\, db + \rho \cos\gamma\, dc,$$

avec deux autres équations analogues.

Si, par le centre d'une sphère de rayon égal à l'unité, nous menons deux droites respectivement parallèles aux deux positions infiniment voisines de ρ, et si nous désignons par $d\sigma$ l'arc de grand cercle compris entre ces deux droites, et par ξ, η, ζ les angles de $d\sigma$ avec les axes, nous aurons

$$d(\cos\alpha) = d\sigma \cos\xi, \quad d(\cos\beta) = d\sigma \cos\eta, \quad d(\cos\gamma) = d\sigma \cos\zeta,$$

et les dernières équations trouvées prendront la forme

$$\frac{d\rho}{\rho}\cos\alpha + d\sigma \cos\xi = \cos\alpha\, da + \cos\beta\, db + \cos\gamma\, dc;$$

$\frac{d\rho}{\rho}$ est ce que l'on pourrait appeler le coefficient linéaire de la déformation dans la direction (α, β, γ) et relativement au temps dt. Posons

$$\frac{d\rho}{\rho} = \varepsilon\, dt;$$

faisons, en outre,

$$d\sigma = \theta\, dt,$$

et alors les relations ci-dessus prennent définitivement la forme

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon\cos\alpha + \theta\cos\xi &= \frac{da}{dt}\cos\alpha + \frac{db}{dt}\cos\beta + \frac{dc}{dt}\cos\gamma,\\ \varepsilon\cos\beta + \theta\cos\eta &= \frac{da'}{dt}\cos\alpha + \frac{db'}{dt}\cos\beta + \frac{dc'}{dt}\cos\gamma,\\ \varepsilon\cos\gamma + \theta\cos\zeta &= \frac{da''}{dt}\cos\alpha + \frac{db''}{dt}\cos\beta + \frac{dc''}{dt}\cos\gamma. \end{aligned}\right.$$

ε est une vitesse de déformation linéaire, mais rapportée à l'unité de longueur; θ est une vitesse angulaire qui exprime le changement de direction de la distance ρ pendant le temps dt.

3. *Représentation géométrique de la variation de ε. — Déformatrice. — Expressions nouvelles des vitesses composantes.* — Nous allons déduire des équations (5) quelques relations entre les variables (ε, θ) et les paramètres de la transformation. En multipliant respectivement les deux membres des équations (5) par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et observant que les deux directions (α, β, γ), (ξ, η, ζ) sont rectangulaires, il vient, en faisant la somme,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon = \left(\frac{da}{dt}\right)\cos^2\alpha + \left(\frac{db}{dt}\right)\cos^2\beta + \left(\frac{dc}{dt}\right)\cos^2\gamma + \left(\frac{db}{dt} + \frac{da'}{dt}\right)\cos\beta\cos\alpha\\ + \left(\frac{da''}{dt} + \frac{dc}{dt}\right)\cos\alpha\cos\gamma + \left(\frac{dc'}{dt} + \frac{db''}{dt}\right)\cos\gamma\cos\beta. \end{aligned}\right.$$

Cette relation donne évidemment la loi de la variation de ε dans les diverses directions, et l'on peut rendre cette loi plus frappante par une représentation géométrique, qui se trouve d'ailleurs tout naturellement indiquée. Observons d'abord que la valeur de ε ne dépend absolument que de la direction (α, β, γ) et nullement de la position du point; on pourrait donc déjà énoncer ce théorème :

Théorème. — *Dans toute figure qui se déplace et se déforme de manière à rester homographique à elle-même, le coefficient de déformation linéaire est le même en tous les points de la figure pour une direction donnée.*

Portons, à partir d'un point quelconque pris pour origine et sur un

rayon vecteur de direction (α, β, γ), une longueur R déterminée par la relation

$$R = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};$$

on aura, pour les coordonnées du point ainsi déterminé,

$$x = R\cos\alpha, \quad y = R\cos\beta, \quad z = R\cos\gamma,$$

et, en éliminant α, β, γ entre ces expressions et l'équation (6), on aura

$$\begin{aligned} 1 = \left(\frac{da}{dt}\right)x^2 + \left(\frac{db'}{dt}\right)y^2 + \left(\frac{dc''}{dt}\right)z^2 \\ + \left(\frac{dc'}{dt} + \frac{db''}{dt}\right)yz + \left(\frac{dc}{dt} + \frac{da''}{dt}\right)zx + \left(\frac{da'}{dt} + \frac{db}{dt}\right)xy, \end{aligned}$$

équation d'une surface à centre du second ordre. Pour qu'elle soit rapportée à ses axes principaux, il faut que l'on ait

$$\frac{dc'}{dt} + \frac{db''}{dt} = 0, \quad \frac{da''}{dt} + \frac{dc}{dt} = 0, \quad \frac{db}{dt} + \frac{da'}{dt} = 0;$$

de telle sorte que, si l'on fait

$$\begin{array}{lll} \dfrac{da}{dt} = \varepsilon_1, & \dfrac{db'}{dt} = \varepsilon_2, & \dfrac{dc''}{dt} = \varepsilon_3, \\ \dfrac{db''}{dt} = -\dfrac{dc'}{dt} = p, & \dfrac{dc}{dt} = -\dfrac{da''}{dt} = q, & \dfrac{da'}{dt} = -\dfrac{db}{dt} = r, \end{array}$$

l'équation de la surface du second ordre devient

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = 1 \tag{7}$$

avec la relation

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma, \tag{8}$$

et les expressions des vitesses composantes d'un point (x, y, z) deviennent, dans ce système d'axes,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 x - ry + qz + \frac{du}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= rx + \varepsilon_2 y - pz + \frac{du'}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= -qx + pz + \varepsilon_3 z + \frac{du''}{dt}. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Pour abréger, je donnerai à la surface du second degré, qui exprime la loi de la déformation autour d'un point, le nom de *surface déformatrice*, ou, plus simplement, de *déformatrice*. ε_1, ε_2, ε_3 sont les vitesses principales de déformation; p, q, r sont les composantes d'une vitesse angulaire que, suivant l'usage, je désignerai par ω.

La relation (8) fournit le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La somme de trois vitesses de déformation suivant trois directions rectangulaires est constante et égale à la somme des trois vitesses principales, qui forme ainsi un des invariants du déplacement.*

De plus, on peut remarquer que, si l'on multiplie les trois équations (9) respectivement par x, y, z, et qu'on les ajoute, on aura, en désignant par u_1, u_2, u_3 les composantes de la vitesse de translation de l'origine,

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=\varepsilon_1 x^2+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 z^2+u_1 x+u_2 y+u_3 z.$$

Or, v étant la vitesse totale du point, ρ son rayon vecteur, le premier membre est égal à

$$\rho v\cos(\widehat{v,\rho});$$

de sorte que la surface, qui a pour équation

$$\varepsilon_1 x^2+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 z^2+u_1 x+u_2 y+u_3 z=c,$$

est le lieu géométrique des points de la figure pour lesquels

$$\rho v\cos(\widehat{v,\rho})=c;$$

ce qui veut dire que *le lieu des points du corps pour lesquels la vitesse, estimée dans la direction du rayon vecteur, est en raison inverse de ce rayon vecteur, est une surface homothétique à la déformatrice.*

4. *Représentation géométrique de $\frac{v}{\rho}$ et de θ.* — Les équations (5) du n° 2 peuvent s'écrire maintenant

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}\varepsilon\cos\alpha+\theta\cos\xi&=\varepsilon_1\cos\alpha-r\cos\beta+q\cos\gamma,\\ \varepsilon\cos\beta+\theta\cos\eta&=r\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta-p\cos\gamma,\\ \varepsilon\cos\gamma+\theta\cos\zeta&=-q\cos\alpha+p\cos\beta+\varepsilon_3\cos\gamma;\end{aligned}\right.$$

si nous ajoutons membre à membre les carrés de ces équations, nous aurons

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon^2\varepsilon^2+\theta^2=(\varepsilon_1^2+q^2+r^2)\cos^2\alpha+(p^2+\varepsilon_2^2+r^2)\cos^2\beta+(p^2+q^2+\varepsilon_3^2)\cos^2\gamma \\ -2[p(\varepsilon_2-\varepsilon_3)+qr]\cos\beta\cos\gamma-2[q(\varepsilon_3-\varepsilon_1)+rp]\cos\gamma\cos\alpha \\ -2[r(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+pq]\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}\right.$$

Le premier membre de cette équation représente le carré du rapport $\frac{v}{\rho}$ de la vitesse du point (x, y, z), relative à l'origine, au rayon vecteur de ce point; car les composantes de cette vitesse peuvent s'exprimer ainsi :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\varepsilon\rho\cos\alpha+\rho\theta\cos\xi, \\ \frac{dy}{dt}&=\varepsilon\rho\cos\beta+\rho\theta\cos\eta, \\ \frac{dz}{dt}&=\varepsilon\rho\cos\gamma+\rho\theta\cos\zeta, \end{aligned}\right.$$

et l'on en déduit bien

$$V^2=\rho^2(\varepsilon^2+\theta^2).$$

L'équation (11) donne donc la loi de la variation du rapport de la vitesse, relative à l'origine, au rayon vecteur correspondant. De même que pour ε, nous aurons donc une représentation géométrique simple de cette variation au moyen de la surface du second degré

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1^2+q^2+r^2)x^2+(p^2+\varepsilon_2^2+r^2)y^2+(p^2+q^2+\varepsilon_3^2)z^2 \\ -2[p(\varepsilon_2-\varepsilon_3)+qr]yz-2[q(\varepsilon_3-\varepsilon_1)+rp]zx-2[r(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+pq]xy=1. \end{aligned}$$

Les rayons vecteurs de cette surface sont égaux à la valeur de $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+\theta^2}}$ ou de $\frac{\rho}{v}$ correspondant à la direction de ce rayon vecteur; d'où il suit que les points de la figure qui ont même vitesse relative à l'origine sont situés sur une surface homothétique à la surface précédente, qui représente elle-même le lieu des points dont la vitesse est égale à l'unité.

En désignant par V le premier membre de l'équation précédente, l'équation

$$(13)\qquad V=C$$

sera donc celle du lieu des points dont la vitesse relative à l'origine est constante.

La considération des invariants relatifs à cette surface montre que, pour trois directions rectangulaires, on a la relation

$$\left(\frac{v_1}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{\rho_3}\right)^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + 2\,\omega^2;$$

c'est-à-dire que *la somme des carrés des rapports des vitesses relatives aux rayons vecteurs correspondants pour trois directions rectangulaires est constante*.

En désignant par R un rayon vecteur arbitraire porté sur la direction (α, β, γ), on voit aisément que l'équation (11) peut s'écrire

$$\varepsilon^2 + \theta^2 = \frac{V}{R^2};$$

d'où

$$\theta^2 = \frac{V}{R^2} - \varepsilon^2 = \frac{V}{R^2} - (\varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma)^2,$$

ou encore

$$\theta^2 = \frac{1}{R^2}\left[V - \frac{1}{R^2}(\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2)^2\right];$$

de sorte que, si l'on prend ce rayon vecteur arbitraire égal à l'inverse de la valeur de θ correspondant à la direction de ce rayon vecteur, on aura, pour représenter la valeur de cette quantité, la surface du quatrième degré

$$(14) \qquad (x^2 + y^2 + z^2)(V - 1) - (\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2)^2 = 0,$$

V ayant la même signification que précédemment.

On peut considérer cette nouvelle surface comme le lieu des courbes d'intersection de deux faisceaux homographiques de quadriques concentriques; car, en désignant par C la fonction $\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2$,

$$C = 0$$

est l'équation du cône asymptote de la déformatrice, et l'équation (14), que l'on peut écrire

$$R^2(V - 1) - C^2 = 0,$$

résulte des intersections des deux faisceaux

$$R^2 - \lambda C = 0,$$
$$V - 1 - \mu C = 0,$$

λ, μ étant liés par la relation

$$\lambda\mu + 1 = 0.$$

L'un des faisceaux est composé de cônes et l'autre de quadriques concentriques.

Dans le cas d'une déformation que l'on peut appeler *sphérique*, c'est-à-dire, si l'on a

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3,$$

l'équation (14) se décompose en deux équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad (qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2 = 1;$$

l'une représente un point-sphère ou un cône imaginaire, la seconde un cylindre ayant pour axe l'axe de rotation

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

5. *Relation entre θ et ω.* — Les formules (12) montrent que la vitesse d'un point relativement à l'origine est la résultante de deux vitesses, savoir : de la vitesse de déformation linéaire $\rho\varepsilon$ dans le sens de la direction (α, β, γ), et d'une vitesse de rotation ou plutôt de *déviation* $\rho\theta$; il n'est peut-être pas inutile de montrer l'influence de la déformation dans l'expression de la variable θ.

Si nous désignons par $(\alpha', \beta', \gamma')$ les angles que la normale au plan passant par le point (x, y, z) et l'axe de rotation $\left(\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}\right)$ mené par l'origine fait avec les axes, les formules (10) deviendront

$$(15) \quad \begin{cases} \varepsilon\cos\alpha + \theta\cos\xi = \varepsilon_1\cos\alpha + \omega\sin\left(\widehat{\rho, \omega}\right)\cos\alpha', \\ \varepsilon\cos\beta + \theta\cos\eta = \varepsilon_2\cos\beta + \omega\sin\left(\widehat{\rho, \omega}\right)\cos\beta', \\ \varepsilon\cos\gamma + \theta\cos\zeta = \varepsilon_3\cos\gamma + \omega\sin\left(\widehat{\rho, \omega}\right)\cos\gamma'. \end{cases}$$

La direction $(\alpha', \beta', \gamma')$ est perpendiculaire au rayon vecteur ρ du point (x, y, z); de sorte que, si l'on multiplie les trois équations (15) par $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, et qu'on désigne par τ l'angle des deux directions (ξ, η, ζ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, on aura, en ajoutant membre à membre,

$$\theta \cos\tau = \omega \sin\left(\widehat{\rho, \omega}\right) + \varepsilon_1 \cos\alpha \cos\alpha' + \varepsilon_2 \cos\beta \cos\beta' + \varepsilon_3 \cos\gamma \cos\gamma'.$$

L'angle τ peut, jusqu'à un certain point, servir de mesure à la déviation de l'arc $\rho\theta$, par suite de la déformation. En effet, dans le cas d'un corps solide invariable, ou même si l'on suppose le cas d'une déformation sphérique $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3)$, il vient simplement

$$\theta = \omega \sin\left(\widehat{\rho, \omega}\right),$$

et la vitesse θ est perpendiculaire au plan $\left(\widehat{\rho, \omega}\right)$.

Remarquons en passant que l'équation précédente, considérée comme l'équation d'une courbe en coordonnées polaires, θ étant le rayon vecteur et l'angle $\left(\widehat{\rho, \omega}\right)$ l'angle polaire, représente un système de deux circonférences tangentes, et, dans l'espace par conséquent, un tore ayant pour courbe méridienne l'ensemble de ces deux circonférences. Or si l'on transforme ce tore par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant l'origine et la puissance l'unité, on obtient un cylindre de révolution; ce qui explique le résultat obtenu à la fin du numéro précédent.

II. — *Discussion des expressions des vitesses composantes.*

6. *Cas d'un point fixe.* — Considérons d'abord, pour plus de simplicité, une figure dont un des points soit absolument fixe, et prenons ce point comme origine des coordonnées; les expressions des vitesses composantes deviennent

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \phantom{-qx+{}} \varepsilon_1 x - ry + qz = X, \\ \frac{dy}{dt} &= \phantom{-q{}} rx + \varepsilon_2 y - pz = Y, \\ \frac{dz}{dt} &= -qx + py + \varepsilon_3 z = Z. \end{aligned}\right.$$

Il est naturel de se demander si l'origine est le seul point du corps dont la vitesse soit nulle; s'il y a de pareils points, ce sont ceux dont les coordonnées vérifient les équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Or ces équations représentent trois plans qui se couperont en un point unique, l'origine, ou suivant une droite, et qui pourront même se confondre, selon que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & -r & q \\ r & \varepsilon_2 & -p \\ -q & p & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

sera différent de zéro ou nul.

Ce déterminant développé devient

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 p^2 + \varepsilon_2 q^2 + \varepsilon_3 r^2;$$

la condition, pour qu'il soit nul, revient à dire que l'axe de rotation $\left(\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}\right)$ doit se trouver sur un certain cône du second degré. En effet, en posant

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{\omega^2} = k, \quad \frac{p}{\omega} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ldots,$$

la condition en question se trouve ainsi exprimée

$$(2) \qquad (\varepsilon_1 + k)x^2 + (\varepsilon_2 + k)y^2 + (\varepsilon_3 + k)z^2 = 0,$$

équation d'un cône du second degré réel ou imaginaire.

1° Si le cône est imaginaire, ce qui aura lieu nécessairement si la déformatrice est un ellipsoïde, il n'y a pas d'autre point sans vitesse que l'origine.

Voici quelle est l'idée que l'on peut se faire en ce cas du mouvement de la figure : si l'on part des formules (12) (du § I), on voit que *le déplacement d'un point quelconque peut être considéré comme résultant d'un glissement $\rho\varepsilon$ sur le rayon vecteur et d'un déplacement angulaire θ du rayon vecteur qui décrit un élément de surface conique.*

De plus, si l'on veut connaître la loi de distribution de la vitesse, il

faut avoir recours à des relations fort simples, et dont je ferai un usage constant dans toute cette étude. Si l'on désigne par v la vitesse d'un point quelconque de la figure, par φ l'angle que fait cette vitesse avec une certaine direction faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont (λ, μ, ν), on aura, et cela dans le cas le plus général, pourvu que les composantes de la vitesse soient des fonctions linéaires des coordonnées,

$$(3)\qquad \begin{cases} v\cos\varphi = \lambda X + \mu Y + \nu Z, \\ v\sin\varphi = \sqrt{\Sigma(\mu Z - \nu Y)^2}. \end{cases}$$

La première de ces formules, de beaucoup la plus importante, montre que la *vitesse d'un point, estimée dans une certaine direction, est proportionnelle à la distance de ce point au plan ayant pour équation*

$$\lambda x + \mu Y + \nu Z = 0,$$

que j'appellerai le plan conjugué de la direction (λ, μ, ν). Dans les applications géométriques, je m'étendrai davantage sur les conséquences de ces formules (3); celle que je viens d'énoncer va me permettre d'étudier la vitesse des divers points de la figure autour du point fixe.

On voit déjà, par exemple, que les plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ sont les plans conjugués des trois axes coordonnés; ainsi la vitesse d'un point, estimée parallèlement à l'axe des x, est proportionnelle à la distance de ce point au plan $X = 0$; et, pour les points de l'axe des x en particulier, elle est proportionnelle à la variable x. Du reste la vitesse estimée suivant le rayon vecteur même du point ayant pour expression $\rho\varepsilon$ croît bien proportionnellement au rayon vecteur; mais la première des formules (3) nous montre que *toutes les vitesses estimées parallèlement* sont proportionnelles aux distances de leurs points d'application à un plan fixe.

2° Si le cône représenté par l'équation (2) est réel, c'est-à-dire si le déterminant Δ est nul, il y a une infinité de points situés en ligne droite dont la vitesse est nulle. Dans le cas d'une figure invariable, c'est ce qui arrive toujours si la figure a un point fixe; seulement il y a généralement une différence entre les deux cas. La droite dont tous les points ont une vitesse nulle, et que je nommerai un *axe des vitesses*, n'est pas un *axe de rotation*, sauf dans certains cas particuliers. Pour nous rendre

compte de ce qui se passe dans le mouvement de la figure, je prendrai l'*axe des vitesses* pour axe des z. Je remarque d'abord que les expressions des vitesses composantes (1) sont particulières à un choix d'axes coordonnés parallèles aux axes principaux de la déformatrice. Si l'on prend un nouveau système d'axes rectangulaires, défini par le tableau suivant :

	x'	y'	z'
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

$a, b, c, \ldots$ étant les neuf cosinus d'une substitution orthogonale; si de plus on pose

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon'_1 &= a^2\varepsilon_1 + b^2\varepsilon_2 + c^2\varepsilon_3,\\ \varepsilon'_2 &= a'^2\varepsilon_1 + b'^2\varepsilon_2 + c'^2\varepsilon_3,\\ \varepsilon'_3 &= a''^2\varepsilon_1 + b''^2\varepsilon_2 + c''^2\varepsilon_3,\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= bc\varepsilon_1 + b'c'\varepsilon_2 + b''c''\varepsilon_3,\\ \mathrm{B} &= ca\varepsilon_1 + c'a'\varepsilon_2 + c''a''\varepsilon_3,\\ \mathrm{C} &= ab\varepsilon_1 + a'b'\varepsilon_2 + a''b''\varepsilon_3,\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} p' &= ap + bq + cr,\\ q' &= a'p + b'q + c'r,\\ r' &= a''p + b''q + c''r,\end{aligned}\right.$$

les composantes de la vitesse suivant les nouveaux axes auront pour expressions

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X}' &= \varepsilon'_1 x' + (\mathrm{C} - r')y' + (\mathrm{B} + q')z',\\ \mathrm{Y}' &= (\mathrm{C} + r')x' + \varepsilon'_2 y' + (\mathrm{A} - p')z',\\ \mathrm{Z}' &= (\mathrm{B} - q')x' + (\mathrm{A} + p')y' + \varepsilon'_3 z'.\end{aligned}\right.$$

Pour la question qui nous occupe, il faut exprimer que les trois plans

$$\mathrm{X}' = 0, \quad \mathrm{Y}' = 0, \quad \mathrm{Z}' = 0$$

passent tous trois par l'axe des z, qui est l'*axe des vitesses;* pour cela, il suffit de faire

$$B + q' = 0, \quad A + p' = 0, \quad \varepsilon'_3 = 0;$$

les expressions des vitesses composantes deviendront, en supprimant les accents,

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon_1 x + (C - r)y, \\ Y &= (C + r)x + \varepsilon_2 y, \\ Z &= 2(py - qx), \end{aligned} \tag{8}$$

et l'équation de la déformatrice

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + 2z(py - qx) + 2Cxy = 1;$$

en choisissant pour axes des x et des y les axes principaux de la section de la déformatrice par le plan des xy, les expressions précédentes se simplifient encore, et l'on a

$$\left\{\begin{aligned} X &= \varepsilon_1 x - ry, \\ Y &= rx + \varepsilon_2 y, \\ Z &= 2(py - qx). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Ces formules nous expliquent fort simplement la distribution des vitesses autour de l'*axe des vitesses*.

D'abord on voit que la *déformatrice* est un hyperboloïde à une nappe, et que l'*axe des vitesses* est une génératrice du cône asymptote de cette surface; c'est ce qui explique pourquoi le *plan conjugué* de l'*axe des vitesses*, qui est en même temps, et par exception, un plan diamétral conjugué de la déformatrice par rapport à cet axe, contient cet axe.

En second lieu, les expressions des vitesses (8) montrent que la vitesse d'un point quelconque de la figure ne dépend que de la position de la projection de ce point sur le plan des xy, ce qui veut dire que *tous les points d'une même droite parallèle à l'axe des vitesses ont des vitesses égales et parallèles*.

De plus, *les points dont les vitesses totales sont égales se trouvent distribués sur des cylindres droits elliptiques ou hyperboliques, ayant pour axe commun l'axe des vitesses*.

Si, dans le cas d'un point fixe, on convient d'appeler *vitesse rayonnante* la vitesse $\rho\varepsilon$, dirigée suivant le rayon vecteur issu du point fixe, on voit sans peine que *le lieu des points d'égale vitesse rayonnante est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une surface homothétique à la déformatrice.*

Il en sera exactement de même pour les *vitesses rayonnantes* dont les directions rayonnent autour de l'axe des vitesses dans des plans perpendiculaires à cet axe.

Enfin, *les points qui ont la même vitesse estimée parallèlement à l'axe des vitesses sont situés dans des plans parallèles à la fois à l'axe des vitesses et à l'axe de rotation, et en particulier cette vitesse est nulle pour tous les points du plan qui contient ces deux axes.*

Cette dernière composante de la vitesse devient nulle pour tous les points de la figure si l'axe de rotation se confond avec l'axe des vitesses, c'est-à-dire si l'on a $p = 0$, $q = 0$.

7. *Autre manière de concevoir le déplacement de la figure. — Rôle de l'axe de rotation.* — On peut arriver à concevoir le déplacement de la figure en interprétant les seconds membres des équations (1) du numéro précédent. Les projections de la vitesse sur les axes se composent de deux parties :

$$\varepsilon_1 x, \quad \varepsilon_2 y, \quad \varepsilon_3 z$$

et

$$qz - ry, \quad rx - pz, \quad py - qx.$$

On connaît bien la signification de ces derniers termes; pour avoir celle des premiers, faisons passer par le point (x, y, z) une surface

$$f(x, y, z) = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = c$$

homothétique à la déformatrice, et soit $\Delta_1 f$ son paramètre différentiel du premier ordre, on a d'abord

$$\varepsilon_1 x = \frac{1}{2}\frac{df}{dx}, \quad \varepsilon_2 y = \frac{1}{2}\frac{df}{dy}, \quad \varepsilon_3 z = \frac{1}{2}\frac{df}{dz};$$

or, si dn est le déplacement du point (x, y, z) estimé normalement à la surface $f(x, y, z) = c$, et dx_1, dy_1, dz_1 les projections de ce déplace-

ment sur les axes, il vient

$$\frac{df}{dx}=\frac{dx_1}{dn}\Delta_1 f,\quad \frac{df}{dy}=\frac{dy_1}{dn}\Delta_1 f,\quad \frac{df}{dz}=\frac{dz_1}{dn}\Delta_1 f,$$

d'où

$$\varepsilon_1 x=\frac{1}{2}\frac{dx_1}{dn}\Delta_1 f,\quad \varepsilon_2 y=\frac{1}{2}\frac{dy_1}{dn}\Delta_1 f,\quad \varepsilon_3 z=\frac{1}{2}\frac{dz_1}{dn}\Delta_1 f.$$

Donc :

La vitesse d'un point quelconque de la figure peut être considérée comme la résultante de la vitesse de rotation qu'aurait le point autour de l'axe $\left(\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}\right)$, *si la figure ne se déformait pas, et d'une vitesse normale à la surface homothétique à la déformatrice passant par le point et égale au demi-paramètre différentiel de cette surface en ce point.*

En d'autres termes :

Imaginons tous les points du corps situés sur une surface homothétique à la déformatrice; en vertu de la déformation, ils se transportent normalement à cette surface avec une vitesse égale au demi-paramètre différentiel du premier ordre relatif à chacun d'eux, pendant que la surface elle-même tourne avec une vitesse angulaire ω *autour de l'axe de rotation.*

8. *Cas où la figure n'a aucun point fixe.* — Reprenons les formules générales

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 x - ry + qz + u_1 = X,\\ \frac{dy}{dt} &= rx + \varepsilon_2 y - pz + u_2 = Y,\\ \frac{dz}{dt} &= -qx + py + \varepsilon_3 z + u_3 = Z.\end{aligned}\right.$$

Les trois plans, ayant pour équations

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,$$

peuvent se couper en un seul point; ce point, qui aura une vitesse nulle pendant le temps dt, je le nommerai *centre des vitesses*, et il jouera le même rôle pendant l'instant dt que le point fixe du nº 6; en second lieu, ils peuvent passer par une même droite, qui sera alors un *axe des*

vitesses; enfin ils peuvent être parallèles à une même direction : on peut dire alors que la figure a un centre de vitesse à l'infini.

Remarque. — Les trois plans $X = o$, $Y = o$, $Z = o$ ne peuvent se confondre; car, parmi les conditions que cela nécessite, on trouve les suivantes :

$$\varepsilon_2\varepsilon_3 = -p^2, \quad \varepsilon_3\varepsilon_1 = -q^2, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2 = -r^2,$$

qui sont évidemment incompatibles.

Les deux premiers cas ne présentent pas d'autres particularités que celles que nous avons étudiées dans les nos 6 et 7. Le seul qui présente quelque intérêt est celui dans lequel les trois plans conjugués des axes sont parallèles à une même direction; c'est à celui-là, en effet, que se rattache le déplacement d'une figure de forme invariable.

D'abord il est bien évident que le plan conjugué d'une direction quelconque (λ, μ, ν), ayant pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = o,$$

sera parallèle à la direction commune (X, Y, Z). Il est donc naturel, en procédant comme au n° 6 (2), de prendre la direction parallèle à tous les plans conjugués pour axe des z, et pour axes des x et des y les axes principaux de la section de la déformatrice par le plan des xy, l'origine étant d'ailleurs indéterminée. Les équations des vitesses deviendront

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \varepsilon_1 x - r y + u_1, \\ Y &= r x + \varepsilon_2 y + u_2, \\ Z &= 2(p y - q x) + u_3; \end{aligned} \right.$$

mais il est évident que, sans changer la direction des axes, je puis disposer de l'origine de manière à supprimer les termes indépendants des variables dans les valeurs de X et de Y, et l'on aura enfin les expressions suivantes :

$$(10 \textit{ bis}) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \varepsilon_1 x - r y, \\ Y &= r x + \varepsilon_2 y, \\ Z &= 2(p y - q x) + u_3. \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles les coefficients n'ont plus évidemment les mêmes valeurs que dans les formules (10) et (9); c'est pour simplifier que je supprime les accents.

La possibilité de passer des formules (10) aux formules (10 *bis*) exige une condition, c'est que le déterminant

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 + r^2$$

ne soit pas nul. Cette condition est essentiellement remplie dans le cas d'une figure invariable de forme, puisque le déterminant se réduit à $+r^2$; elle l'est encore si la section de la déformatrice par le plan des xy est une ellipse. En général donc, les expressions des vitesses pourront prendre la forme (10 *bis*). Examinons alors la distribution des vitesses dans les divers points de la figure.

Puisque les trois composantes de la vitesse ne dépendent que des coordonnées x et y et d'une vitesse de translation qui est la même pour tous les points, il en résulte que tous les points d'une droite parallèle à l'axe des z ont des vitesses égales et parallèles. En particulier, tous les points de l'axe des z ont une vitesse commune de glissement u_3; nous conserverons à cette droite le nom d'*axe glissant des vitesses*. Il faut bien remarquer que ce sera la seule droite de la figure qui jouira de cette propriété. Nous pourrons donc énoncer cette propriété importante : *Lorsque, dans le déplacement de la figure, il n'y a ni* CENTRE *ni* AXE DE VITESSE, *tous les plans conjugués des diverses directions sont parallèles à une même droite; tous les points d'une même droite parallèle à celle-ci ont des vitesses égales et parallèles, et enfin, entre toutes ces droites, il en est une dont tous les points ont une vitesse commune de glissement dans la direction de cette droite elle-même.*

Enfin, pour compléter l'étude de la distribution des vitesses, remarquons encore que la déformatrice, dont l'équation est

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + 2z(py - qx) + u_3 z = 1,$$

est un hyperboloïde à une nappe, à moins que le déterminant

$$\varepsilon_1 p^2 + \varepsilon_2 q^2$$

ne soit nul, auquel cas elle a la forme d'un cylindre.

Les points de même vitesse totale sont distribués sur des cylindres du second degré

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = c,$$

et les points d'égale vitesse rayonnante autour de l'axe glissant sur des

cylindres du quatrième degré ayant pour trace, sur le plan des xy, la transformée par rayons vecteurs réciproques de la section de la déformatrice par le même plan.

Si, par cas, le déterminant $\varepsilon_1\varepsilon_2 + r^2$ était nul, les résultats précédents seraient modifiés; car il pourra arriver, ou bien qu'il n'y ait plus d'*axe glissant*, ou bien qu'il y en ait une infinité.

III. — *Déplacement et déformation d'une surface algébrique.*

9. *Déplacement d'une surface. — Caractéristique. — Surface auxiliaire. — Foyers. — Courbe adjointe.* — Le déplacement d'une figure étant régi par les formules (9) du paragraphe précédent, il est intéressant de rechercher ce que deviennent les points situés à l'instant t sur une surface donnée par son équation

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Pour cela, désignons par (x_1, y_1, z_1) les nouvelles valeurs des coordonnées du point (x, y, z) après le temps $t + dt$; en désignant par X_1, Y_1, Z_1 ce que deviennent les valeurs de X, Y, Z lorsqu'on y remplace x, y, z par x_1, y_1, z_1, on aura d'abord

$$x_1 = x + X\,dt, \quad y_1 = y + Y dt, \quad z_1 = z + Z dt,$$

et, par suite, en négligeant les termes du second ordre,

$$x = x_1 - X_1 dt, \quad y = y_1 - Y_1 dt, \quad z = z_1 - Z_1 dt;$$

donc, en substituant ces valeurs de (x, y, z) dans l'équation (1) de la surface, on aura une équation

$$f(x_1 - X_1 dt, y_1 - Y_1 dt, z_1 - Z_1 dt) = 0, \tag{2}$$

qui représente évidemment le lieu des points (x_1, y_1, z_1) qui étaient primitivement sur la surface proposée; c'est donc bien l'équation de la surface transformée.

L'équation (2) nous montre, ce que nous savions déjà, que *le degré de la surface proposée n'est pas altéré dans ce genre de déplacement et de déformation*.

Si l'on développe l'équation (2) en ne conservant que les termes du premier ordre, il vient, en supprimant les indices,

$$(3) \qquad f(x,y,z) - \left(X\frac{df}{dx} + Y\frac{df}{dy} + Z\frac{df}{dz}\right)dt = 0;$$

et, sous cette forme, on voit que cette nouvelle surface passe par la courbe représentée par les deux équations

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{c} f(x,y,z) = 0, \\ X\dfrac{df}{dx} + Y\dfrac{df}{dy} + Z\dfrac{df}{dz} = 0. \end{array}\right.$$

Cette courbe est donc l'intersection de la surface primitive et de sa transformée infiniment voisine; c'est la *caractéristique* de la surface.

Je désignerai sous le nom de *surface auxiliaire* la surface, représentée par la seconde des équations (4), qui coupe la surface proposée suivant la caractéristique.

A cette surface correspond une courbe ayant pour équations

$$(5) \qquad X : \frac{df}{dx} = Y : \frac{df}{dy} = Z : \frac{df}{dz},$$

que je nommerai la *courbe adjointe* à la surface proposée.

Pour montrer le rôle de la *surface auxiliaire* et de la *courbe adjointe* dans le déplacement de la surface, proposons-nous de résoudre la question suivante :

Quel est le lieu géométrique des points de la surface mobile dont les trajectoires font un angle donné φ avec la normale correspondant à la surface?

Or on trouvera facilement que

$$\tang\varphi = \frac{\sqrt{\left(Y\dfrac{df}{dz} - Z\dfrac{df}{dy}\right)^2 + \left(Z\dfrac{df}{dx} - X\dfrac{df}{dz}\right)^2 + \left(X\dfrac{df}{dy} - Y\dfrac{df}{dx}\right)^2}}{X\dfrac{df}{dx} + Y\dfrac{df}{dy} + Z\dfrac{df}{dz}};$$

par suite, les points cherchés seront sur la courbe d'intersection de la

surface proposée avec la surface représentée par l'équation

$$\left(Y\frac{df}{dz}-Z\frac{df}{dy}\right)^2+\left(Z\frac{df}{dx}-X\frac{df}{dz}\right)^2$$
$$+\left(X\frac{df}{dy}-Y\frac{df}{dx}\right)^2-\operatorname{tang}^2\varphi\left(X\frac{df}{dx}+Y\frac{df}{dy}+Z\frac{df}{dz}\right)^2=0.$$

Si l'on suppose en particulier $\varphi=0$, c'est-à-dire si l'on cherche les points dont les trajectoires sont normales à la surface proposée, on voit qu'ils sont les points d'intersection de la surface proposée avec la *courbe adjointe*. Nous pourrons, en empruntant à un travail bien connu, de M. Chasles (¹), cette dénomination, appeler *foyer* (cinématique) d'une surface mobile tout point de cette surface dont l'élément de trajectoire sera normal à la surface.

Les foyers d'une surface résultent en définitive des intersections de trois surfaces de même degré; par conséquent, si m est le degré de la surface proposée, on voit que cette surface pourra avoir m^3 foyers.

Si l'on suppose $\varphi=\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si l'on cherche les points qui commencent à se déplacer sur la surface elle-même, on trouve tous les points de la caractéristique.

Si l'on considère en outre toute une famille de surfaces homothétiques

$$f(x,y,z)=c,$$

elles ont toutes même *surface auxiliaire* et même *courbe adjointe*. *La surface auxiliaire est le lieu des caractéristiques, et la courbe adjointe, le lieu des foyers de toutes ces surfaces.*

On voit en outre que, lorsque, dans le déplacement de la figure, il y a des points sans vitesse, ils appartiennent à la fois à la surface auxiliaire et à la *courbe adjointe;* et s'il n'y a pas de point sans vitesse, cette surface et cette courbe renferment la droite parallèle à la direction commune de tous les plans conjugués.

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 26 juin 1843.

IV. — *Étude spéciale du déplacement des points situés dans un même plan.*

10. Si l'on suppose que la surface que nous venons de considérer devienne un plan ayant pour équation

$$\lambda x + \mu y + \nu z - \varpi = 0, \tag{1}$$

(λ, μ, ν) étant les cosinus des angles de la perpendiculaire au plan avec les axes, et ϖ la distance de l'origine au plan, on voit que ce que nous appelions la *surface auxiliaire* a pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0; \tag{2}$$

c'est donc le *plan conjugué* de la direction (λ, μ, ν) (*voir* n° 6).

Le plan représenté par l'équation (2) *est le lieu de tous les points de la figure dont les vitesses ont des directions perpendiculaires à la direction* (λ, μ, ν) *et par conséquent parallèles au plan* (1).

C'est ce qui explique pourquoi le *plan conjugué d'une direction* (λ, μ, ν) *coupe tout plan perpendiculaire à cette direction suivant sa caractéristique.*

Les caractéristiques de tous les plans parallèles sont parallèles.

La courbe adjointe devient, dans le cas du plan, une ligne droite ayant pour équations

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu} = \frac{Z}{\nu}, \tag{3}$$

que je nommerai la *droite adjointe* à la direction (λ, μ, ν).

En se reportant à la seconde des formules (3) du n° 6, on voit que *la droite adjointe à une direction* (λ, μ, ν) *est le lieu des points dont les vitesses sont parallèles à cette direction.*

Il s'ensuit que *la droite adjointe à une direction est le lieu des foyers de tous les plans perpendiculaires à cette direction.*

Les foyers de tous les plans parallèles à une même direction ont des vitesses perpendiculaires à cette direction; ils sont donc tous situés dans le plan conjugué de cette direction; donc :

Le plan conjugué d'une direction est le lieu des foyers et, par suite, des droites adjointes de tous les plans parallèles à cette direction.

Si nous considérons deux directions rectangulaires A et B, on remarque que les points dont les vitesses sont parallèles à B et, par suite, perpendiculaires à A, sont à la fois sur la *droite adjointe* de B et le *plan conjugué* de A; donc :

La droite adjointe à une direction est l'intersection commune de tous les plans conjugués aux directions perpendiculaires à la première.

11. Si l'on prend tous les plans qui passent par une même droite, nous savons déjà que leurs foyers sont dans un même plan; mais on peut se demander quel est le lieu géométrique de ces foyers.

En remarquant que tout plan est normal à la trajectoire de son foyer, cela revient à chercher *quels sont les points de la figure tels, que les plans normaux à leurs trajectoires passent par une même droite.*

Or l'équation d'un plan normal à la trajectoire d'un point (x', y', z') est

$$(x-x')\,dx' + (y-y')\,dy' + (z-z')\,dz' = 0$$

ou

$$(x-x')X' + (y-y')Y' + (z-z')Z' = 0.$$

Les conditions qui exprimeront que ce plan normal passe par une droite ayant pour équations

$$\frac{x-x_1}{\lambda} = \frac{y-y_1}{\mu} = \frac{z-z_1}{\nu} = \rho$$

sont, en supprimant les accents de x', y', z', X', Y', Z',

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,\\ &(x_1 - x)X + (y_1 - y)Y + (z_1 - z)Z = 0, \end{aligned}\right.$$

et elles expriment que les points cherchés sont, d'une part, dans le plan conjugué de la droite et, d'autre part, sur une surface du second degré semblable à la déformatrice. Donc *le lieu des foyers des plans qui passent par une droite est une conique intersection d'une surface du second degré semblable à la déformatrice par le plan conjugué de la droite donnée.*

12. A cette courbe, lieu des foyers des plans qui passent par une droite donnée, correspond une surface réglée du second degré, lieu

des caractéristiques correspondantes; en effet, P et P′ désignant deux fonctions linéaires des coordonnées, les équations

$$P = 0, \quad P' = 0$$

représentent une droite, et

$$(5) \qquad P - kP' = 0$$

l'équation de tous les plans passant par cette droite; l'équation du plan conjugué sera de la forme

$$(6) \qquad \lambda X + \mu Y + \nu Z - k(\lambda' X + \mu' Y + \nu' Z) = 0,$$

et l'ensemble de ces deux équations pour une même valeur de k représente la caractéristique de celui des plans (5) qui correspond à cette valeur de k. En éliminant ce paramètre variable entre les équations (5) et (6), on aura donc l'équation du lieu des caractéristiques

$$(7) \qquad (\lambda P' - \lambda' P)X + (\mu P' - \mu' P)Y + (\nu P' - \nu' P)Z = 0,$$

laquelle représente bien une surface réglée du second degré; en général, cette surface sera un hyperboloïde à une nappe. Ainsi *les caractéristiques de tous les plans passant par une droite donnée sont situées sur une surface réglée du second degré.*

La courbe lieu des foyers et la surface lieu des caractéristiques des plans passant par une droite donnée ne sont autres choses que la *courbe adjointe* et la *surface auxiliaire* d'une famille de plans. Pour que l'équation des plans passant par la droite ($P = 0$, $P' = 0$) rentre dans le type

$$f(x, y, z) = c,$$

il faut l'écrire

$$\frac{P}{P'} = k;$$

en prenant les dérivées partielles du premier membre et substituant dans l'équation (5) et la seconde des équations (4) du n° 9, on aurait les équations trouvées par d'autres considérations.

Si la droite par laquelle passent tous les plans s'éloigne à l'infini, la courbe adjointe devient la droite adjointe, et la surface auxiliaire, le plan conjugué de la direction de la droite.

13. Je n'ai rien supposé jusqu'à présent relativement aux plans $X = o$, $Y = o$, $Z = o$, que l'on pourrait bien appeler pour abréger les plans des vitesses coordonnées; mais on voit aisément que si ces trois plans se coupent en un seul point, c'est-à-dire s'il y a un *centre des vitesses, tous les plans conjugués aux diverses directions, toutes les droites adjointes passent par le centre des vitesses.*

S'il y a un axe des vitesses, *tous les plans conjugués aux diverses directions passent par cet axe, et toutes les droites adjointes se confondent avec lui.*

Enfin *si les plans des vitesses coordonnées sont parallèles à une même direction, il en sera de même de tous les plans conjugués et de toutes les droites adjointes.*

14. Je n'insisterai pas sur une foule de théorèmes concernant les plans conjugués et les droites adjointes; il suffit de lire le Mémoire de M. Chasles que j'ai déjà cité, et un Mémoire de M. Mannheim, publié dans le 26ᵉ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et d'étendre les théorèmes qui s'y trouvent démontrés dans le cas d'une figure invariable au cas plus général où la figure subit une déformation homographique. Je passe à une propriété beaucoup moins remarquée, si même elle l'a été.

Cherchons le lieu des points de la figure mobile dont les trajectoires ou les vitesses sont inclinées d'un angle donné φ sur une direction fixe (λ, μ, ν).

En divisant membre à membre les expressions de $v \sin\varphi$, $v \cos\varphi$ trouvées au nº 6 (équat. 3), on trouve

$$\Sigma[(\mu Z - \nu Y)^2] - \tang^2\varphi(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2 = o \tag{8}$$

(le Σ comprend trois termes analogues à celui qui est écrit); cette équation montre que *le lieu des points cherchés est un cône du second degré.*

De plus, la forme même de l'équation de ce cône montre que *la droite adjointe et le plan conjugué de la direction fixe sont la polaire et le plan de contact communs à tous les cônes compris dans l'équation* (8), *quand on y donne à l'inclinaison φ toutes les valeurs possibles.*

Il résulte évidemment de là que, dans un plan, *le lieu des points dont les vitesses ou les trajectoires sont également inclinées sur la normale au*

plan est une conique, et que le foyer cinématique du plan est le pôle de la caractéristique, par rapport à toutes les coniques correspondant aux diverses inclinaisons des vitesses.

Dans le cas particulier où la figure est invariable, la propriété que je viens d'énoncer prend une forme plus frappante encore. Les expressions des vitesses, dans ce cas, deviennent

$$X = qz - ry + u_1, \quad Y = rx - pz + u_2, \quad Z = py - qx + u_3;$$

si l'on prend pour plan des xy le plan mobile lui-même, pour origine son foyer, pour *axe* des z sa normale et pour plan des zx le plan passant par la normale et la direction de l'axe de rotation, cela revient à faire

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1, \quad q = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0;$$

or l'équation du cône (8) se réduit à

$$X^2 + Y^2 - \operatorname{tang}^2\varphi Z^2 = 0,$$

et, en remplaçant X, Y, Z par leurs expressions simplifiées, on trouve, en y faisant $z = 0$,

$$(9) \qquad r^2(x^2 + y^2) - \operatorname{tang}^2\varphi(py + u_3)^2 = 0,$$

ce qui est bien l'équation d'une conique ayant pour *foyer* l'origine, c'est-à-dire le foyer cinématique du plan, et pour *directrice* sa caractéristique.

Ainsi, *dans le cas d'une figure de forme invariable, les diverses coniques, lieux des points d'un plan dont les vitesses ont une inclinaison donnée sur la normale au plan, ont pour foyer commun le foyer cinématique du plan et pour directrice sa caractéristique.*

Soient ρ le rayon vecteur d'un point du plan mobile par rapport à son foyer; ψ l'inclinaison de l'axe spontané sur la normale; δ la distance du point à la caractéristique; l'équation (9) se transforme en la suivante

$$\frac{\rho}{\delta} = \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang}\varphi,$$

ce qui exprime que *le rapport des distances d'un point du plan mobile au foyer et à la caractéristique est égal au produit des tangentes de l'inclinai-*

son de la vitesse et de l'inclinaison de l'axe de rotation sur la normale au plan (figure de forme invariable).

V. — *Détermination géométrique et analytique des paramètres du déplacement.*

15. *Cas d'une figure de forme invariable.* — Je prends d'abord ce cas fort simple où la connaissance des vitesses de trois points en grandeur et en direction suffit à la détermination complète du déplacement de la figure. Soient v, v', v'' les vitesses de trois points donnés; φ, φ', φ'' leurs inclinaisons sur la normale au plan de ces points; (ρ, δ), (ρ', δ'), (ρ'', δ'') leurs distances au foyer et à la caractéristique; on aura trois couples de relations telles que les suivantes (nº 14, ψ désignant toujours l'inclinaison de l'axe de rotation sur la normale) :

$$v\cos\varphi = \delta\omega\sin\psi, \quad v\sin\varphi = \rho\omega\cos\psi;$$

donc les distances des trois points donnés à la caractéristique de leur plan sont liées par les équations

$$\frac{\delta}{v\cos\varphi} = \frac{\delta'}{v'\cos\varphi'} = \frac{\delta''}{v''\cos\varphi''};$$

donc cette caractéristique n'est autre chose que *l'axe d'homothétie de trois cercles dont on connaît les centres et les rayons.*

De même, pour les distances des trois points au foyer, on a

$$\frac{\rho}{v\sin\varphi} = \frac{\rho'}{v'\sin\varphi'} = \frac{\rho''}{v''\sin\varphi''};$$

donc le foyer est connu, puisqu'il est *à l'intersection de deux cercles, lieux des points dont les rapports des distances à deux points donnés sont connus.*

Quand on a ainsi le foyer et la caractéristique du plan des trois points, on a, par la relation

$$\frac{\rho}{\delta} = \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi,$$

l'inclinaison ψ de l'axe spontané glissant sur la normale à ce plan. La

trace de cet axe est sur la plus courte distance du foyer à la caractéristique; cela résulte des expressions des vitesses composantes dans le dernier système de coordonnées que nous avons pris; on a alors, pour un point quelconque du plan des xy,

$$X = -ry, \quad Y = rx, \quad Z = py + u_3.$$

(On doit se rappeler que l'origine est le foyer du plan xy, et que l'axe ox est parallèle à la caractéristique.) Pour le pied de l'axe spontané qui ne peut se mouvoir que dans la direction de cet axe, parallèle au plan de zx, la composante Y de la vitesse est nulle, donc $x = 0$; ce point est donc bien sur la plus courte distance du foyer à la caractéristique. Comme sa vitesse fait un angle ψ avec la normale, on aura donc, pour déterminer sa position, la relation

$$\frac{\rho}{\delta} = \operatorname{tang}^2 \psi.$$

Enfin on a

$$\omega = \frac{v}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \psi + \delta^2 \sin^2 \psi}},$$

v, ρ, δ se rapportant à un des points donnés. On a donc ainsi résolu complétement la question de la détermination de l'axe spontané glissant. Quant à la translation suivant cet axe, si on la désigne par U, on a

$$u_3 = U \cos \psi;$$

u_3 est le déplacement du foyer; comme c'est une rotation autour de la caractéristique, si l'on appelle δ_0 la distance du foyer à la caractéristique, il vient

$$u_3 = \delta_0 \omega \sin \psi,$$

d'où

$$U = \delta_0 \omega \operatorname{tang} \psi,$$

expression qui donne le rapport $\frac{U}{\omega} = \delta_0 \operatorname{tang} \psi$. Tout ce qui concerne le déplacement est donc parfaitement déterminé d'après la connaissance des vitesses de trois points en grandeur et en direction.

16. *Cas général.* — Dans le cas général du déplacement que nous étudions, les fonctions X, Y, Z renferment douze paramètres; il ne suffit

donc plus de connaître les vitesses de trois points en grandeur et en direction pour déterminer ces paramètres : il faut quatre groupes de relations, c'est-à-dire avoir les coordonnées et les vitesses de quatre points.

La solution géométrique de la question est tout aussi simple que celle que je viens d'exposer pour le cas d'une figure invariable de forme. Les quatre points dont on connaît les vitesses v_1, v_2, v_3, v_4 sont les sommets d'un tétraèdre ; or, si l'on estime les vitesses de ces quatre points suivant une direction normale à l'une des faces, le plan conjugué à cette direction sera déterminé par les rapports des distances des sommets du tétraèdre à ce plan, lesquelles sont proportionnelles aux vitesses ainsi estimées. Cela revient à dire encore que si l'on imagine quatre sphères ayant pour centres les sommets du tétraèdre et pour rayons les vitesses de ces quatre points estimées dans une certaine direction, le plan conjugué à cette direction est le plan d'homothétie des quatre sphères. En répétant la construction pour les directions normales aux quatre faces, on aura quatre plans conjugués. De plus on aura la droite adjointe correspondant à chaque face, en la considérant comme l'intersection des plans conjugués des côtés de cette face. Si tous les plans conjugués se coupent en un même point, il y a un *centre des vitesses ;* s'ils se coupent suivant une même droite, il y a un *axe des vitesses ;* enfin s'ils sont parallèles à une même direction, le centre des vitesses est à l'infini ; dans ce dernier cas, on aura l'axe spontané glissant, en menant un plan perpendiculaire à cette direction parallèle à tous les plans conjugués, et en déterminant le foyer de ce plan, qui sera le pied de l'axe spontané.

Le déplacement de la figure est donc complétement déterminé, puisqu'on pourra trouver la vitesse d'un point quelconque de la figure, ainsi que je l'ai déjà indiqué dans la Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹). Et réciproquement on pourra dire quels sont les points de la figure doués d'une vitesse assignée d'avance en grandeur et en direction.

17. *Solution analytique de la question.* — Nous prendrons trois axes rectangulaires quelconques ; comme ils ne coïncident pas avec les axes principaux de la déformatrice, il faut prendre les formules les plus gé-

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 mai 1872.

nérales du déplacement, qui seront, d'après ce qui a été dit au n° 6 (2),

$$(1)\quad \begin{cases} X = \varepsilon'_1 x + (C - r')y + (B + q')z + u_1, \\ Y = (C + r')x + \varepsilon'_2 y + (A - p')z + u_2, \\ Z = (B - q')x + (A + p')y + \varepsilon'_3 z + u_3, \end{cases}$$

et nous aurons quatre groupes semblables à celui-ci, ce qui fera bien douze équations pour déterminer les douze quantités $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, p', q', r'$, A, B, C, u_1, u_2, u_3, et, par suite, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, p, q, r$ et les directions des déformations principales.

Soient donc (X_i, Y_i, Z_i), (x_i, y_i, z_i) les vitesses composantes et les coordonnées des quatre points donnés; l'indice i pouvant prendre les quatre valeurs 1, 2, 3, 4, la considération des quatre vitesses composantes suivant l'axe des x fournira un premier groupe de quatre équations, telles que

$$(2)\qquad X_i = \varepsilon'_1 x_i + (C - r')y_i + (B + q')z_i + u_1 \; (i = 1, 2, 3, 4).$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

représente, comme on sait, six fois le volume V du tétraèdre des quatre points; et si l'on désigne par f_i l'aire de la face opposée au sommet (x_i, y_i, z_i), par $(\lambda_i, \mu_i, \nu_i)$ les cosinus des angles de la normale n_i à cette face avec les axes, on déduira facilement de l'expression du déterminant

$$V = \tfrac{1}{3}\Sigma x_i \lambda_i f_i = \tfrac{1}{3}\Sigma y_i \mu_i f_i = \tfrac{1}{3}\Sigma z_i \nu_i f_i.$$

De plus les déterminants partiels qui multiplient les termes de la quatrième colonne verticale représentent six fois les volumes des tétraèdres ayant pour sommet commun l'origine et pour bases les quatre faces f_i du tétraèdre des quatre points; de sorte que, si δ_i désigne la distance de l'origine à la face f_i, chacun de ces déterminants partiels représentera l'une des quatre valeurs de $2 f_i \delta_i$, et, par suite, on aura encore

$$V = \tfrac{1}{3}\Sigma f_i \delta_i;$$

ceci rappelé, la résolution des équations du groupe (2) donnera

$$\varepsilon'_1 = \frac{1}{3V}\Sigma X_i\lambda_i f_i, \quad C - r' = \frac{1}{3V}\Sigma X_i\mu_i f_i, \quad B + q' = \frac{1}{3V}\Sigma X_i\nu_i f_i,$$

$$u_1 = \frac{1}{3V}\Sigma X_i\delta_i f_i.$$

En résolvant de même les équations des deux autres groupes Y_i, Z_i, et combinant au besoin les solutions, on aura, en introduisant les quatre hauteurs h_i du tétraèdre et remplaçant $3V$ par $f_i h_i$,

$$(3) \qquad \begin{cases} u_1 = \sum X_i \dfrac{\delta_i}{h_i}, \\ u_2 = \sum Y_i \dfrac{\delta_i}{h_i}, \\ u_3 = \sum Z_i \dfrac{\delta_i}{h_i}; \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \varepsilon'_1 = \sum \dfrac{\lambda_i X_i}{h_i}, \\ \varepsilon'_2 = \sum \dfrac{\mu_i Y_i}{h_i}, \\ \varepsilon'_3 = \sum \dfrac{\nu_i Z_i}{h_i}; \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} A = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\mu_i Z_i + \nu_i Y_i)\right], \\ B = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\nu_i X_i + \lambda_i Z_i)\right], \\ C = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\lambda_i Y_i + \mu_i X_i)\right]; \end{cases}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} p' = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\mu_i Z_i - \nu_i Y_i)\right], \\ q' = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\nu_i X_i - \lambda_i Z_i)\right], \\ r' = \sum \left[\dfrac{1}{h_i}(\lambda_i Y_i - \mu_i X_i)\right]. \end{cases}$$

Nous avons donc ainsi des expressions très-symétriques des paramètres

du déplacement en fonction des vitesses données et des éléments du tétraèdre des quatre points.

18. *Discussion des expressions des u_j.* — Il faut d'abord savoir à quel type de déplacement se rattache le cas proposé; pour cela, il faut avoir recours aux expressions des composantes u_j de la vitesse de translation de l'origine ($j = 1, 2, 3$).

Pour qu'il y ait un *centre des vitesses*, il faut pouvoir déterminer un point tel, que ses distances δ_i aux faces du tétraèdre donné vérifient les trois équations

$$u_j = 0,$$

et aussi la relation

$$\Sigma f_i \delta_i = 3V,$$

ou

$$\sum \frac{\delta_i}{h_i} = 1;$$

de sorte que, en prenant pour inconnues les rapports $\frac{\delta_i}{h_i}$, le dénominateur commun des valeurs de ces inconnues sera le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & 1 \end{vmatrix} = 6V';$$

si l'on convient de regarder les composantes des vitesses comme des coordonnées orthogonales, V′ sera le volume d'un tétraèdre dont les sommets (X_i, Y_i, Z_i) seront parfaitement déterminés, et dont on connaîtra, par conséquent, les faces f'_i, les hauteurs h'_i et les distances δ'_i de l'origine aux faces f'_i.

Cela posé, si V′ n'est pas nul, il y aura un *centre de vitesse*, et il sera déterminé par les quatre équations

$$\frac{\delta_i}{h_i} = \frac{\delta'_i}{h'_i} \, (i = 1, 2, 3, 4);$$

mais, si $V' = 0$, on doit avoir $h'_i = 0$, et alors, si les δ'_i sont tous nuls, il y aura un *axe des vitesses*, tandis que, si l'un au moins est différent de zéro, le centre des vitesses passe à l'infini.

19. L'équation de la déformatrice rapportée aux axes actuels est

$$\varepsilon'_1 x^2 + \varepsilon'_2 y^2 + \varepsilon'_3 z^2 + 2Ayz + 2Bzx + 2Cxy = 1;$$

si nous voulons la rapporter à ses axes principaux, qui sont les directions des déformations principales, on a à résoudre l'équation du troisième degré en ε

$$\begin{vmatrix} \varepsilon'_1 - \varepsilon & C & B \\ C & \varepsilon'_2 - \varepsilon & A \\ B & A & \varepsilon'_3 - \varepsilon \end{vmatrix} = 0;$$

les trois racines de cette équation sont les déformations principales, et, une fois déterminées, elles fourniront les directions des axes principaux.

Quelques-uns des coefficients de l'équation du troisième degré en ε s'expriment assez simplement en fonction des données; telle est, par exemple, la somme

$$\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

On trouvera que cet invariant représente *la somme des rapports des quatre vitesses données estimées normalement aux faces, aux quatre hauteurs correspondantes du tétraèdre*. On trouverait de même que *le carré de la vitesse angulaire ω est égal à la somme des carrés des rapports des quatre vitesses données estimées parallèlement aux faces du tétraèdre, aux quatre hauteurs correspondantes, plus la somme des doubles produits de ces mêmes rapports deux à deux par les cosinus des angles formés par les normales aux plans déterminés par les vitesses et les normales aux faces*.

On voit donc que l'on peut déterminer avec une grande facilité tous les éléments du déplacement infiniment petit de la figure, dès que l'on connaît les vitesses de quatre de ses points en grandeur et en direction.

20. *Déformation d'une surface réglée à génératrices articulées.* — Pour donner un autre exemple de la détermination des paramètres du déplacement d'une figure d'après la connaissance de certaines conditions, considérons une surface réglée qui se déforme homographiquement, et cherchons quelle doit être la loi de déformation pour que deux points

situés sur une même génératrice restent à une distance invariable l'un de l'autre. On a un exemple de ce genre de déformation dans ces petits systèmes de tiges articulées ayant à peu près la forme d'un cône tronqué, et dont on se sert pour entourer les vases de fleurs (cache-pots).

Soit, à l'instant t,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=k^2$$

l'équation d'un hyperboloïde à une nappe; au bout du temps $t+dt$, les points qui sont actuellement sur cette surface seront sur une surface voisine

$$\frac{x}{a^2}(x+\mathrm{X}\,dt)+\frac{y}{b^2}(y+\mathrm{Y}\,dt)-\frac{z}{c^2}(z+\mathrm{Z}\,dt)=k\left(k+\frac{dk}{dt}dt\right);$$

les fonctions linéaires X, Y, Z sont représentées par les formules générales

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{X}&=\varepsilon_1 x+(\mathrm{C}-r)y+(\mathrm{B}+q)z,\\ \mathrm{Y}&=(\mathrm{C}+r)x+\varepsilon_2 y+(\mathrm{A}-p)z,\\ \mathrm{Z}&=(\mathrm{B}-q)x+(\mathrm{A}+p)y+\varepsilon_3 z,\end{aligned}\right.$$

en considérant les vitesses relatives au centre de la surface que l'on pourra supposer fixe.

Les équations d'une génératrice de la surface sont

$$(\mathrm{G})\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}&=\lambda\left(k-\frac{x}{a}\right),\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(k+\frac{x}{a}\right).\end{aligned}\right.$$

Il est aisé de voir que le plan conjugué de la direction de cette génératrice a pour équation

$$2a\lambda\mathrm{X}+b(1-\lambda^2)\mathrm{Y}+c(1+\lambda^2)\mathrm{Z}=0,$$

et que, par suite, la vitesse d'un point de la génératrice estimée dans

la direction de cette génératrice est

$$v\cos\varphi = \frac{2a\lambda X + b(1-\lambda^2)Y + c(1+\lambda^2)Z}{\sqrt{4a^2\lambda^2 + b^2(1-\lambda^2)^2 + c^2(1+\lambda^2)^2}}.$$

Pour satisfaire à la question proposée, il faut rendre cette expression indépendante de la position du point sur la génératrice; pour cela, je remplace X, Y, Z par leurs expressions ci-dessus, et j'élimine y et z de l'expression de $v\cos\varphi$ au moyen des équations de la génératrice; le résultat devra être indépendant de x, ce qui donnera l'équation de condition

$$\begin{aligned}
2a\lambda[2a\lambda\varepsilon_1 + b(1-\lambda^2)(C-r) + c(1+\lambda^2)(B+q)]& \\
+ b(1-\lambda^2)[2a\lambda(C+r) + b(1-\lambda^2)\varepsilon_2 + c(1+\lambda^2)(A-p)]& \\
+ c(1+\lambda^2)[2a\lambda(B-q) + b(1-\lambda^2)(A+p) + c(1-\lambda^2)\varepsilon_3] = 0.&
\end{aligned}$$

Mais cette relation doit être vérifiée, quelle que soit la valeur de λ; de sorte que, comme elle est du quatrième degré en λ, elle se décompose en cinq équations de conditions qui sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
&b^2\varepsilon_2 - 2bcA + c^2\varepsilon_3 = 0,\\
&acB - abC = 0,\\
&2a^2\varepsilon_1 - b^2\varepsilon_2 + c^2\varepsilon_3 = 0,\\
&acB + abC = 0,\\
&b^2\varepsilon_2 + 2bcA + c^2\varepsilon_3 = 0,
\end{aligned}$$

et l'on en déduit à vue

$$A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0;$$

ce qui prouve déjà que les axes principaux de la déformatrice coïncident avec les axes principaux de la surface proposée; de plus, on a entre les déformations principales les deux relations

$$\varepsilon_1 a^2 = \varepsilon_2 b^2 = -\varepsilon_3 c^2;$$

de sorte que les formules qui donneront la vitesse d'un point quel-

conque de la figure seront

$$X = \varepsilon_1 x - ry + qz,$$

$$Y = rx + \frac{a^2\varepsilon_1}{b^2} y - pz,$$

$$Z = -qx + py - \frac{a^2\varepsilon_1}{c^2} z.$$

Avec un mode de déformation indiqué par les formules qui précèdent, deux points, pris à volonté sur une génératrice quelconque de la surface de l'un ou l'autre système de génération, resteront à la même distance. Par suite, les quatre points d'intersection de deux génératrices d'un système avec deux génératrices de l'autre formeront un quadrilatère dont les côtés pourront être articulés, tout en satisfaisant aux formulès précédentes du déplacement. Toutefois la nécessité, pour un point commun à deux génératrices de systèmes différents, de se mouvoir à la fois sur les deux génératrices entraîne des relations entre les composantes de la vitesse angulaire; ces relations s'obtiennent très-simplement en identifiant les expressions de la vitesse d'un point commun à deux génératrices de la surface, et l'on trouve pour conditions

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c\sqrt{-1}};$$

la seule solution acceptable est donc

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0,$$

et les formules qui expriment la déformation de la surface réglée sont donc enfin

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2\varepsilon_1}{b^2} y,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a^2\varepsilon_1}{c^2} z.$$

On en conclut, pour la vitesse totale d'un point quelconque de la surface,

$$v = a^2\varepsilon_1 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = a^2\varepsilon_1 \frac{1}{2} \Delta_1,$$

Δ_1 n'étant autre chose que le paramètre différentiel du premier ordre. *La vitesse est donc normale en chaque point à la surface, qui se déforme, et proportionnelle à la valeur du paramètre différentiel du premier ordre en ce point.*

Comme j'ai supposé le centre de la surface fixe, et que, par suite des liaisons du système, les points de la figure se trouvent toujours sur une surface de même nature, les formules ci-dessus ne renferment qu'un seul paramètre; il suffira donc de connaître une seule vitesse en un point connu pour pouvoir assigner la vitesse d'un autre point quelconque de la figure.

NOUVEAU RELAIS,

PAR M. L. D'ARLINCOURT.

En télégraphie électrique, le relais sert à introduire une pile supplémentaire dans le circuit toutes les fois que le courant envoyé sur la ligne par le poste expéditeur n'a pas une intensité suffisante pour produire l'effet voulu.

Placé au poste de réception, le relais reçoit le courant de ligne et ferme le circuit d'une pile locale dont le courant met en jeu l'appareil récepteur.

Disposés en translation sur la ligne, les relais permettent d'établir la correspondance électrique entre deux postes trop éloignés pour que la communication *directe* soit possible.

Dans les relais généralement employés, une palette mobile, en fer doux ou aimanté, oscille sous l'influence des pôles d'un électro-aimant. Ces appareils ont des inconvénients bien connus et signalés depuis longtemps.

Le fer des noyaux de l'électro-aimant conserve toujours un peu de force coercitive ; il en résulte que la désaimantation de ces pièces n'est pas instantanée et que la transmission est nécessairement ralentie. D'ailleurs, le moindre changement survenu dans la longueur ou l'isolement de la ligne, ou même dans le mode de transmission, exige un nouveau réglage de l'appareil, car l'intensité du magnétisme rémanent des pièces de fer doux varie nécessairement dans le même sens que l'intensité et la durée du courant de ligne.

Les courants de retour, inévitables et parfois si intenses sur les longues lignes, sont une cause de retard pour les relais disposés en trans-

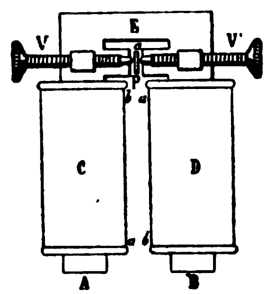
lation. Quand on ne parvient pas à les supprimer, les relais sont transformés en *trembleurs*, et la transmission devient, par le fait même, impossible.

Le relais n'en est pas moins un organe dont la télégraphie électrique ne saurait se passer; il y aurait donc grand avantage à construire un appareil qui permît de se mettre à l'abri des courants de retour et de l'influence perturbatrice des variations du magnétisme rémanent.

Je pense avoir complétement résolu cet intéressant problème, en utilisant l'action magnétique des bobines pour *attirer* la palette, et le magnétisme rémanent des noyaux de fer doux pour *remplacer le ressort antagoniste et ramener la palette à sa position d'équilibre*.

Soit ECD (*fig.* 1) un électro-aimant ordinaire de fer doux; au moment où le courant passe, le fer doux s'aimante, le pôle austral de

Fig. 1.



l'aimant temporaire est en A et son pôle boréal en B. Les *maxima* d'action des deux pôles magnétiques sont placés dans le voisinage des extrémités libres des deux branches. Dans toute l'étendue de chacune de ces deux branches, l'action magnétique reste de même sens, mais elle diminue rapidement d'intensité à mesure que l'on se rapproche de la ligne neutre située dans la culasse E; cette action est très-faible dans le voisinage de la culasse.

Quant aux deux bobines C, D de l'électro-aimant, chacune d'elles, pendant le passage du courant, représente un aimant dont les pôles, ou *maxima* d'action, sont situés aux extrémités et distribués ainsi que l'indique la figure.

En arrière des bobines, tout près de la culasse E, entre deux *renfle-*

ments des noyaux de fer doux, plaçons l'extrémité australe *a* d'une palette P aimantée et mobile autour de son autre extrémité. Deux vis, V, V' servent à limiter l'amplitude des oscillations de la palette.

Quand le courant passe, le pôle austral de cette palette est soumis à l'action de deux couples de forces.

1° Le renflement de la branche B agit comme un pôle boréal et attire la palette; le renflement de la branche A agit comme un pôle austral et repousse la palette. L'action totale de ce premier couple de forces tend donc à imprimer à la palette un mouvement de déplacement qui la rapproche de la pointe de la vis V'. Rappelons-nous, d'ailleurs, que tout se passe dans le voisinage de la culasse E, c'est-à-dire de la ligne neutre, et que, dans cette région, les actions magnétiques concordantes des branches de l'électro-aimant sont nécessairement très-faibles.

2° L'extrémité postérieure de la bobine D est un pôle austral et repousse la palette; en même temps, l'extrémité postérieure de la bobine C, qui est un pôle boréal, attire la palette. L'action totale de ce second couple de forces tend donc à imprimer à la palette un mouvement de déplacement qui la rapproche de la pointe de la vis V.

L'action totale des bobines et l'action totale des branches de fer doux sollicitent donc la palette en sens contraire; mais, dans cette région, l'action des bobines l'emporte évidemment sur celle des branches de fer doux, et la palette est entraînée vers la pointe de la vis V.

La palette reste nécessairement dans cette position, collée contre la pointe de la vis V, tant que le courant continue à passer.

Au moment où le courant est interrompu, l'action magnétique des deux bobines cesse *instantanément*. Il n'en est pas de même des noyaux de fer doux qui restent aimantés dans le même sens et dont le magnétisme est même *exalté* par l'action de l'extra-courant de rupture; par leur magnétisme rémanent, ils continuent à agir sur l'extrémité australe de la palette P. Soumise aux *seules* actions magnétiques des branches A et B du fer doux et libre de leur obéir, la palette est repoussée de la pointe de la vis V à la pointe de la vis V', et persiste dans cette nouvelle position tant que le circuit reste ouvert.

A chaque nouvelle fermeture du circuit, la palette se meut évidemment de la pointe V' à la pointe V, et à chaque nouvelle rupture elle est ramenée en sens inverse de la pointe V à la pointe V'.

Il suffit évidemment de *renverser* le sens du courant, pour imprimer à la palette des mouvements de va-et-vient alternatifs et de sens contraires.

En plaçant une palette mobile aimantée entre les extrémités postérieures des bobines et la culasse de l'électro-aimant, je suis donc parvenu à utiliser l'action magnétique des extrémités des bobines pour *attirer* la palette, et à remplacer le *ressort antagoniste de rappel* par le magnétisme rémanent des noyaux de fer doux.

Ce magnétisme rémanent, au lieu d'être une cause de perturbation comme dans les relais ordinaires, devient, dans mon appareil, un agent précieux qui assure la régularité des mouvements oscillatoires de la palette.

Mon relais marche avec une très-grande rapidité, car la palette est ramenée par l'action du magnétisme rémanent, qui est une cause de ralentissement dans les relais ordinaires, et cet effet, produit par les alternatives d'un même courant, ne nécessite l'emploi d'aucune force accessoire, ni courant inverse, ni ressort antagoniste.

La sensibilité de mon relais est très-grande, car les oscillations de la palette sont produites par une simple rupture d'équilibre.

Mon relais est évidemment sans réglage; car, d'une part, le sens du courant de ligne détermine, *toujours et nécessairement*, les déplacements de la palette dans le sens convenable pour la transmission des dépêches; et, d'autre part, le jeu de la palette est indépendant de l'intensité du courant de ligne.

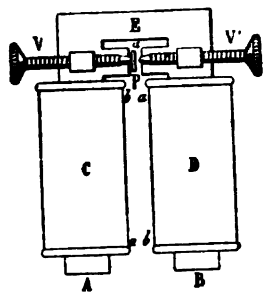
Mon relais possède une propriété toute nouvelle et d'une très-grande importance en télégraphie électrique. Par un simple réglage *fait une fois pour toutes*, il me sert à supprimer complétement les courants de retour des lignes aériennes les plus longues, et même des lignes sous-marines. C'est un service que l'on a jusqu'ici vainement demandé aux relais ordinaires.

Tant que les pointes des vis V, V′ restent, comme dans la *fig.* 1, symétriquement placées par rapport aux faces libres des renflements des branches de fer doux, la palette, primitivement collée contre la pointe V′, se meut de V′ en V au moment de la fermeture du circuit, et est ramenée de V en V′ à la rupture. Une fermeture et une rupture

sont donc nécessaires pour faire exécuter à la palette une oscillation complète.

Il est facile de régler la position des pointes des vis de manière que la palette reste complétement immobile à la fermeture du circuit, et exécute une oscillation complète par le seul fait de la rupture. En effet, la palette étant maintenue collée à la pointe V′ par le magnétisme rémanent, poussons la pointe V′ (*fig.* 2) de manière à faire dépasser à

Fig. 2.



la palette le milieu de l'espace qui sépare les deux renflements. Le pôle *a* de la palette est austral et fortement aimanté; on le rapproche ainsi du renflement de la branche A, qui agit aussi comme un pôle austral, mais *très-faible*. Or, lorsque la palette est suffisamment rapprochée de ce renflement, en vertu de la prédominance très-marquée de son aimantation, elle change par influence le signe magnétique du renflement; dès lors, la palette, attirée vers le renflement de la branche A magnétisé par influence, vient s'appliquer contre la pointe V et reste dans cette position.

Les choses étant ainsi disposées, faisons passer le courant. Au moment de la fermeture, l'action des bobines pousse la palette contre la pointe V qu'elle touche déjà; la palette ne change donc pas de place.

Au moment de la rupture, le magnétisme de la branche A est encore dans toute sa puissance, il est même *renforcé* par l'extra-courant de rupture; le renflement correspondant est donc un pôle austral assez fort pour repousser la palette qui vient butter contre la pointe V′.

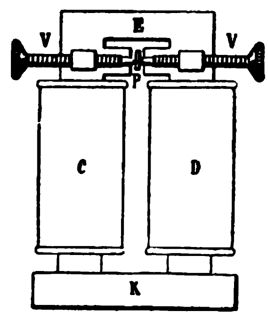
Mais, pendant que la palette exécute ce mouvement, l'intensité du magnétisme rémanent des noyaux de fer doux baisse considérablement,

et lorsque la palette butte contre V', le renflement de la branche A est un pôle austral *assez faible* pour que la palette soit ramenée contre la pointe V par l'influence exercée sur ce renflement et à cette très-courte distance, par son pôle *a* qui n'a rien perdu de sa puissance.

Il est donc facile de régler le relais pour que la palette reste immobile à la fermeture du courant de ligne et exécute une oscillation complète entre les deux pointes, par le seul fait de la rupture du circuit. Cet effet, que l'on peut comparer à un *coup de fouet*, donne le moyen de supprimer les courants de retour dans les appareils et surtout dans les relais de translation.

Construction du relais. — Les dispositions adoptées dans la construction de ce nouveau relais sont représentées dans les *fig.* 3, 4, 5.

Fig. 3.



K est un socle de cuivre qui sert à fixer les noyaux de fer doux de l'électro-aimant et le support de la palette mobile. V, V sont les vis qui servent à limiter les oscillations de l'extrémité libre de la palette P, placée entre les deux renflements des noyaux de fer doux de l'électro-aimant; ces renflements et la palette sont, d'ailleurs, situés entre les bobines C, D et la culasse E de l'électro-aimant.

Dans la *fig.* 4, la palette P est une lame d'acier aimantée; elle oscille à charnière entre deux vis I, J, à l'extrémité d'un support en cuivre L, fixé lui-même au socle de cuivre K.

Dans la *fig.* 5, la palette P est en fer doux et mobile à charnière entre deux vis I, J, sur l'extrémité australe A d'un aimant *fixe* en fer à cheval, supporté par le socle de cuivre K.

Magnétisée par influence, l'extrémité libre de la palette est donc elle-même un pôle austral; cette dernière disposition est préférable à

Fig. 4.

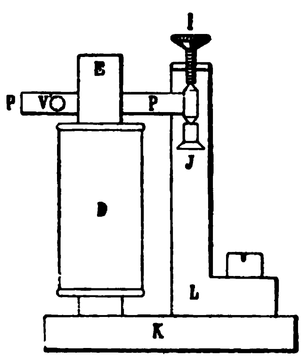
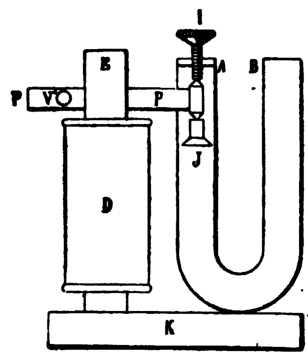


Fig. 5.



la précédente. Une palette d'acier aimanté pourrait, en effet, au bout d'un certain temps, perdre complétement, ou du moins en grande partie, son magnétisme; au contraire, une palette de fer doux aimantée par l'influence d'un aimant fixe est un pôle magnétique dont l'intensité reste indéfiniment constante.

Installation d'un relais complet de translation.

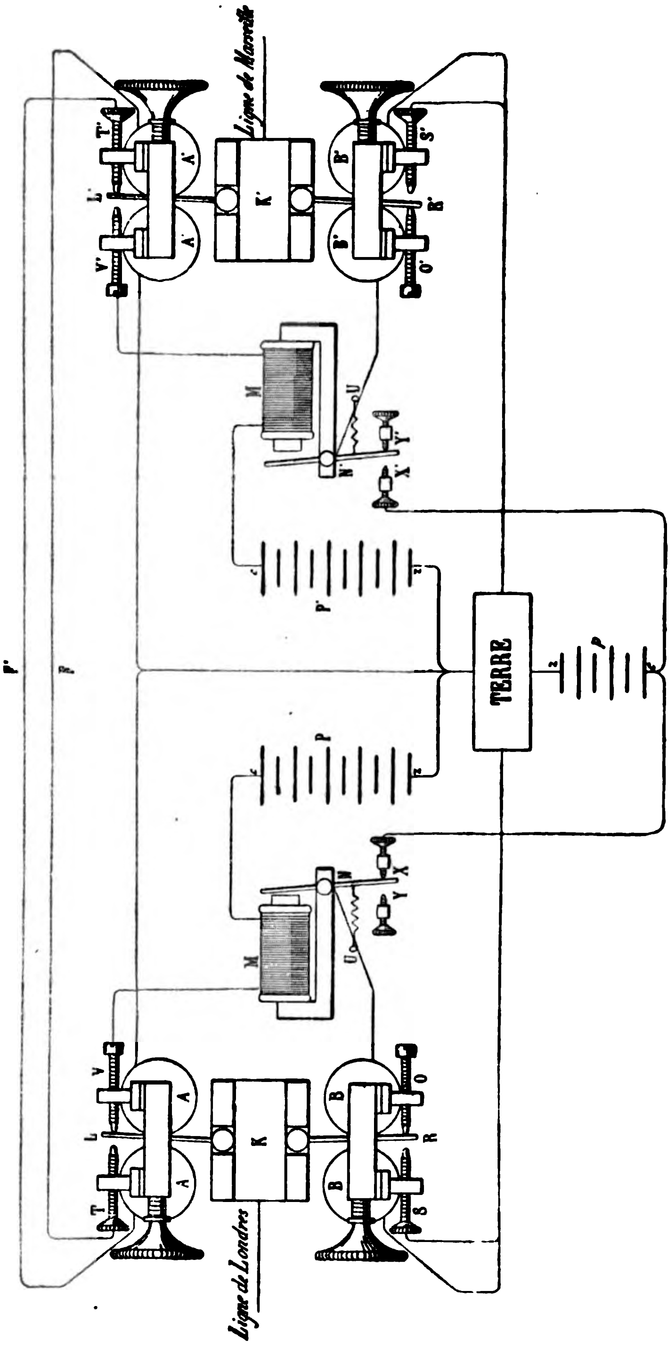
La *fig.* 6 représente un relais de translation complet tel qu'il fonctionne, installé à Paris, pour la correspondance directe entre Londres et Marseille.

A, A est un relais de translation réglé de manière que sa palette L exécute *une demi-oscillation* à la fermeture et l'autre demi-oscillation à la rupture du circuit.

B, B est un relais *à coup de fouet*, à décharge de ligne; il est réglé de manière que sa palette R reste immobile à la fermeture et exécute *une oscillation complète* à la rupture du circuit.

Ces deux palettes L, R sont mobiles à charnière sur les deux pôles de noms contraires d'un fort aimant fixe K. Les extrémités libres de ces deux palettes de fer doux aimantées par influence sont donc elles-mêmes des pôles magnétiques de noms contraires.

Fig. 6.


Ligne de Marseille
Ligne de Londres
TERRE
K
K'
M
M'
P
P'
p
A
B
A'
B'
T
L
V
S
R
O
T'
L'
V'
S'
R'
O'
N
N'
U
X
Y
X'
Y'

A l'état de repos, lorsque aucun courant ne passe sur la ligne, le magnétisme rémanent des noyaux de fer doux des électro-aimants retient la palette L contre la vis T, et la palette R est maintenue contre la vis O par l'influence de son magnétisme propre sur le barreau correspondant de l'électro-aimant.

La ligne de Londres est fixée à la masse métallique de l'aimant fixe K; par son intermédiaire, elle communique avec les palettes L et R et avec les vis contre lesquelles ces palettes appuient.

M est un parleur dont la bobine communique avec la vis V du relais AA et avec le pôle positif d'une pile P, destinée à envoyer un courant sur la ligne de Londres. A l'état de repos, quand rien ne passe sur la ligne, sa palette N est retenue par le ressort antagoniste U contre la borne isolée Y. Cette palette N communique, d'ailleurs, avec les fils des bobines B, B du relais *à coup de fouet*.

Enfin une pile locale *p* communique par son pôle positif avec la vis X. C'est sous l'influence de cette pile locale que fonctionne le relais *à coup de fouet* BB.

Dans le même poste de Paris est disposé un appareil en tout semblable au précédent, comprenant un relais de translation A'A', un relais *à coup de fouet* B'B', un parleur M'. La ligne de Marseille est fixée à la masse métallique de l'aimant fixe K', commune aux deux relais. Une pile P', dont le pôle positif communique avec le fil des bobines du parleur M', est destinée à envoyer un courant électrique sur la ligne de Marseille. La même pile locale *p* sert à mettre en jeu le relais *à coup de fouet* B'B'.

Dans ces deux systèmes de relais, les pièces qui remplissent les mêmes fonctions sont désignées par les mêmes lettres; dans le second système, les lettres sont affectées du signe *prime*.

Nous compléterons la description en indiquant comment ces deux systèmes de relais communiquent entre eux.

Un premier fil métallique F met la vis T du relais de translation AA du premier système en communication permanente avec le fil des bobines A', A' du relais de translation du second système.

Un second fil F' met la vis T' du relais de translation A'A' du second système en communication permanente avec le fil des bobines A, A du relais de translation du premier système.

Cela posé, supposons que de Marseille on envoie un courant sur la ligne.

Ce courant arrive à Paris à l'aimant K′, passe dans la palette L′, dans la vis T′, gagne le fil des bobines A, A du relais de translation du premier système par l'intermédiaire de F′ et se perd dans la terre. Sous l'influence de ce courant, la palette L quitte la vis T, se colle à la vis V et ferme le circuit de la pile P.

Le courant de la pile P gagne la vis V, la ligne de Londres par l'intermédiaire de la palette L et de l'aimant K, et va au poste de Londres donner le signal transmis.

Mais le courant de la pile P traverse nécessairement la bobine du parleur M. La palette N de ce parleur est attirée, son extrémité quitte la borne Y, bute contre la borne X et ferme le circuit de la pile locale *p*, dont le courant traverse les bobines B, B du relais *à coup de fouet*. Sous l'influence de ce courant, la palette R de ce relais ne bouge pas, elle se colle plus fortement contre la vis O qu'elle touchait déjà.

Au moment où le circuit est rompu à Marseille, la palette L du relais de translation AA est ramenée contre la vis T et rompt le circuit de la pile P. De son côté, le ressort antagoniste U ramène la palette N du parleur M contre la borne Y et rompt le circuit de la pile locale *p*.

Par le fait de la rupture du courant de la pile locale *p*, la palette R du relais *à coup de fouet* BB va heurter la vis S. Par ce contact, elle décharge la ligne de Londres; elle fait perdre son courant de retour dans la terre; car la vis S communique d'une façon permanente à la terre, et empêche ce courant de retour de causer des perturbations en gagnan par F le fil des bobines A′, A′ du relais de translation du second système. Puis cette palette R regagne immédiatement la vis O.

Tout se trouve donc prêt au poste de Paris pour une nouvelle transmission en translation de Marseille à Londres.

Quand la transmission s'exécute en sens inverse de Londres à Marseille, le jeu des appareils dans le poste de Paris est exactement le même; seulement ce sont les pièces du second système de relais qui sont mises en mouvement. La portion de ligne située entre Paris et Marseille est déchargée dans la terre à chaque rupture du circuit de ligne par le relais *à coup de fouet* B′B′, fonctionnant sous l'influence de la pile locale *p*.

Les parleurs M, M′ servent à constater, par le bruit qu'ils font, le bon fonctionnement des relais de translation; c'est un précieux moyen de contrôle dont il y aurait danger à se priver. Ils servent aussi à fermer le circuit de la pile locale p qui fait fonctionner les relais de décharge *à coup de fouet*. Ces derniers relais, il est vrai, auraient pu être placés directement sous l'influence des courants de ligne des piles P, P′; mais il y a avantage à conserver la pile locale.

L'expérience est d'accord avec la théorie pour montrer que, pour produire un *coup de fouet* très-net, très-fort et très-rapide, il faut employer un courant relativement fort. Or, si ces relais de décharge fonctionnaient sous l'influence directe des courants de ligne, le *coup de fouet* serait d'autant moins fort et d'autant moins efficace que la charge de la ligne serait plus considérable.

En effet, supposons que l'on transmette par un temps très-sec et sur une ligne bien isolée; dans ces circonstances, la ligne est très-résistante, le courant à l'origine est relativement faible, et *la charge de la ligne est maximum*. Si les bobines du relais de décharge ne sont traversées que par le courant de ligne, le coup de fouet sera donc *moins fort* précisément alors que le courant de retour de la ligne a plus d'intensité et doit être supprimé avec plus de soin.

Avec la pile locale, on a, au contraire, un courant excitateur d'intensité constante, et le coup de fouet s'effectue, dans tous les cas, avec la même netteté, la même force, la même rapidité, et conserve la même efficacité.

Mon système de relais a supprimé les difficultés de transmission sur plusieurs câbles de la Manche et de la mer du Nord; il fait depuis près d'un an, avec une régularité qui ne s'est jamais démentie, le service de la correspondance par translation entre Londres et Marseille.

Les services qu'il rend tous les jours à la transmission automatique des dépêches envoyées par les télégraphes ordinaires sont bien loin de donner une idée exacte et complète de la merveilleuse rapidité de mon système électromagnétique.

Il y a plus de trois ans, je l'avais imaginé comme complément indispensable de mon appareil autographique, et l'on sait que, pour donner des résultats bien nets, la télégraphie *autographique* exige une vitesse d'émission *dix* fois plus rapide que la télégraphie *ordinaire*. C'est en

utilisant mon système de relais que j'ai pu, pour la première fois, reproduire, avec mon appareil autographique, une dépêche écrite, avec une remarquable netteté, à une distance de *neuf cents* et même de *douze cents* kilomètres.

En résumé, ce nouvel organe électromagnétique est d'un maniement facile, se passe de toute espèce de réglage autre que celui de sa première mise en service, marche régulièrement sur toutes les lignes et par tous les temps, permet de supprimer les courants de retour, même sur les câbles sous-marins, et peut s'appliquer avec avantage à tous les appareils télégraphiques en général pour augmenter la rapidité de la transmission des dépêches.

NOTE

SUR

LA TRANSFORMATION DES COURBES

PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES,

PAR M. NEWENGLOWSKI,

PROFESSEUR A MONT-DE-MARSAN.

On peut définir la transformation des courbes par rayons vecteurs réciproques, en disant qu'en deux points correspondants M, M' (*fig.* 1) les tangentes MT, M'T font avec le rayon vecteur OMM' des angles TMM', TM'M égaux. Cela posé, considérons une courbe tracée sur une surface

Fig. 1.

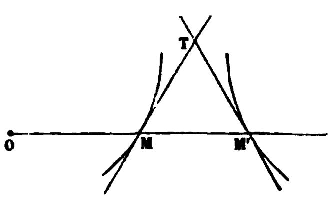
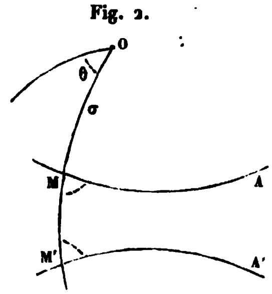


Fig. 2.



quelconque (*fig.* 2). On peut prendre pour coordonnées d'un point quelconque M de cette courbe la longueur σ de la ligne géodésique menée à ce point par un point fixe O pris sur la surface, et l'angle θ de ce *rayon vecteur géodésique* avec une ligne géodésique fixe. Sur chaque rayon OM, prenons un point M' tel que $OM' = \sigma'$, et cherchons s'il peut exister entre σ et σ' une relation

$$f(\sigma, \sigma') = 0$$

indépendante de l'angle θ, et telle que la courbe A'M' soit *inverse* de la courbe AM, c'est-à-dire qu'aux points correspondants les angles AMM', A'M'M soient égaux.

Pour cela, désignons par s la longueur d'un arc compté sur la courbe AM à partir d'une origine quelconque; on a, comme on sait,

$$ds^2 = d\sigma^2 + \lambda^2 d\theta^2,$$

λ étant, en général, fonction de σ et de θ.

Si i désigne l'angle de la courbe AM avec le rayon vecteur géodésique, on a

$$\cos i = \frac{1}{\lambda}\frac{d\sigma}{d\theta}.$$

Désignons par les mêmes lettres, mais accentuées, les éléments correspondants de la courbe A'M'; on aura

$$\cos i' = \frac{1}{\lambda'}\frac{d\sigma'}{d\theta},$$

et les deux courbes seront inverses si

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\sigma}{d\theta} + \frac{1}{\lambda'}\frac{d\sigma'}{d\theta} = 0$$

ou

$$\frac{d\sigma}{\lambda} + \frac{d\sigma'}{\lambda'} = 0. \tag{1}$$

Cette relation doit être indépendante de θ. Donc il faut que λ et λ' soient fonctions de σ et σ' seuls, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda = \varphi(\sigma), \quad \lambda' = \varphi'(\sigma').$$

Alors l'expression générale de l'élément de courbe tracée sur la surface sera donnée par l'équation

$$ds^2 = d\sigma^2 + [\varphi(\sigma)]^2 d\theta^2.$$

Ce qui montre que la surface donnée *doit être de révolution autour d'un axe mené par le point* O, pour que la transformation demandée soit possible.

Si l'on désigne par α l'angle du méridien mené par M avec le méridien

fixe contenant la ligne géodésique fixe prise *comme axe polaire*, on aura

$$\theta = b\alpha,$$

b étant une constante, et l'on pourra écrire

$$ds^2 = d\sigma^2 + [b\varphi(\sigma)]^2 d\alpha^2;$$

et l'on voit sous cette forme que $b\varphi(\sigma)$ est la distance d'un point de la surface à l'axe de révolution.

Ce qui précède est vrai, en général; mais si la surface donnée est un cône quelconque ayant son sommet en O, les lignes géodésiques σ seront des lignes droites, et l'on aura

$$ds^2 = d\sigma^2 + \sigma^2 d\theta^2,$$

$d\theta$ étant l'angle de deux génératrices infiniment voisines, et l'équation (1) prendra la forme

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{d\sigma'}{\sigma'} = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma\sigma' = m,$$

ce qui est la relation bien connue de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Reprenons l'équation (1), dans laquelle nous supposerons

$$\lambda = b\varphi(\sigma), \quad \lambda' = b\varphi'(\sigma');$$

nous pourrons l'écrire

$$\frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)} + \frac{d\sigma'}{\varphi(\sigma')} = 0,$$

et, par suite, nous pourrons énoncer ce théorème :

Étant donnée une surface de révolution autour d'un axe qui la rencontre en O (*fig.* 3), *deux courbes tracées sur cette surface seront inverses par rapport au point* O, *si les arcs de méridiens comptés à partir de* O *jusqu'aux points correspondants* M, M' *satisfont à l'équation*

$$(2) \qquad \int \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)} + \int \frac{d\sigma'}{\varphi'(\sigma')} = m,$$

dans laquelle m est une constante, et $\varphi(\sigma)$ est proportionnelle à la distance MP *du point* M *à l'axe.*

Exemples. — 1° Sur une sphère, on a

$$\varphi(\sigma) = \sin\sigma;$$

l'équation (2) devient

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma \times \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma' = m \quad (^1).$$

Fig. 3.

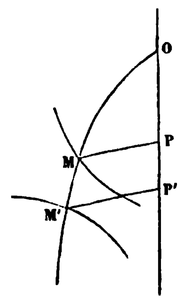
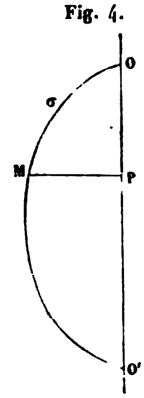


Fig. 4.



2° Considérons la surface de révolution engendrée sur une cycloïde tournant autour de la ligne OO' (*fig.* 4), qui joint deux points de rebroussement consécutifs.

On a ici

$$\mathrm{MP} = \frac{\sigma(8a - \sigma)}{8a},$$

a désignant le rayon de cercle générateur. L'équation (2) peut s'écrire

$$\int \frac{8a\,d\sigma}{\sigma(\sigma a - \sigma)} + \int \frac{8a\,d\sigma'}{\sigma'(8a - \sigma')} = m \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma\sigma'}{(8a - \sigma)(8a - \sigma')} = m;$$

mais si $\mathrm{OM} = \sigma$, $\mathrm{O'M} = 8a - \sigma$, désignant donc $8a - \sigma$ et $8a - \sigma'$ par σ_1 et σ'_1, on peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\sigma\sigma'}{\sigma_1\sigma'_1} = m.$$

Donc, sur la surface considérée, deux courbes inverses par rapport au point O, le sont aussi par rapport au point O'.

(1) Voir *Étude sur la sphère* (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* janvier 1870).

SUR LES

ARCS DE CERTAINES COURBES SPHÉRIQUES,

PAR M. NEWENGLOWSKI,

PROFESSEUR A MONT-DE-MARSAN.

Il existe une relation simple entre l'arc d'une courbe plane et celui de sa perspective sur une sphère dont le centre est dans le plan de la courbe, quand on prend pour point de vue l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à ce plan. Si l'on transforme la courbe plane par rayons vecteurs réciproques, le pôle de transformation étant le centre de la sphère, on peut comparer l'axe de la courbe plane donnée et celui de la perspective de sa transformée; la nouvelle relation est de même forme que la première.

Si l'arc de la courbe plane donnée s'exprime par des intégrales elliptiques, il en sera de même de l'arc des courbes sphériques. Les courbes planes que M. J.-A. Serret a nommées courbes elliptiques de première classe jouissent de cette propriété, que la différence entre leur arc et celui de leur perspective est rectifiable. Ce théorème est la traduction géométrique d'une formule de transformation d'une intégrale elliptique de troisième espèce particulière en une autre de première espèce. Tel est, dans son ensemble, l'objet de la présente Note.

I. — *Formules de transformation.*

Soient $\alpha\mu$ une courbe plane quelconque (*fig.* 1), $\alpha'\mu'$ la courbe inverse, AM, A'M' leurs perspectives sur une sphère (dont nous prendrons le rayon pour unité). Si l'on pose

$$u = O\mu, \quad u' = O\mu', \quad \rho = PM, \quad \rho' = PM',$$

on aura

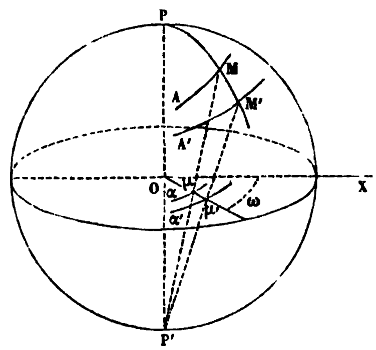
$$u = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho, \quad u' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho',$$

et si m est la puissance de la transformation par rayons vecteurs réciproques, on aura

$$(1) \qquad uu' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho \times \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho' = m.$$

Cela posé, rapportons les courbes planes à la droite OX prise comme

Fig. 1.



axe polaire, et soit ω l'angle μOX; si l'on appelle σ l'arc de la courbe $\alpha\mu$, s celui de sa perspective, on a

$$d\sigma^2 = du^2 + u^2 d\omega^2,$$
$$ds^2 = d\rho^2 + \sin^2\rho\, d\omega^2.$$

En se rappelant que

$$u = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho,$$

on trouve facilement

$$(2) \qquad ds = \frac{2\,d\sigma}{1 + u^2}.$$

Soient pareillement σ', s' les arcs des courbes $\alpha'\mu'$, A'M'; on a d'abord, comme on sait,

$$(3) \qquad d\sigma' = \frac{m\,d\sigma}{u^2};$$

puis, en vertu de (2)

$$ds' = \frac{2\,d\sigma'}{1 + u'^2};$$

et par conséquent, en remplaçant $d\sigma'$ et u' par leurs expressions en $d\sigma$ et u,

$$ds' = \frac{2m\,d\sigma}{m^2 + u^2}. \tag{4}$$

Les formules (2) et (4) sont bien de la même forme; il suffit, en effet, de donner à m la valeur numérique 1 pour passer de la formule (4) à la formule (2).

Il faut remarquer, d'ailleurs, que pour $m = \pm 1$ la perspective de la courbe $\alpha'\mu'$ est égale à celle de la courbe $\alpha\mu$. En effet, on passe directement de AM à A'M' au moyen de la relation (1)

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\rho \times \text{tang}\tfrac{1}{2}\rho' = m.$$

Si $m = \pm 1$, les deux courbes AM, A'M' sont évidemment symétriques et les deux courbes inverses de $\alpha\mu$ égales entre elles.

II. — *Application des formules précédentes.*

La courbe plane satisfait à l'équation

$$d\sigma = a\frac{du}{\text{U}},$$

dans laquelle u est le rayon vecteur et U *un radical du deuxième degré portant sur un polynôme du quatrième degré en u.*

Le polynôme du quatrième degré sous le radical U peut avoir cinq formes différentes, que nous partagerons en deux séries.

Première série. — U est de l'une des deux formes suivantes :

$$\text{U} = \sqrt{(u^2 - p^2)(u^2 - q^2)},$$
$$\text{U} = \sqrt{-(u^2 + p^2)(u^2 - q^2)}.$$

Dans ces deux cas, l'arc s' dépendra d'une intégrale de troisième espèce et l'arc σ d'une intégrale de première espèce.

Prenons, par exemple, la première de ces deux formes.

En supposant $p^2 < q^2$, on fera

$$\frac{p^2}{q^2} = e^2 < 1, \quad u = px, \quad \text{X} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - e^2x^2)},$$

et l'on aura

$$\frac{du}{U} = \frac{1}{q}\frac{dx}{X},$$

et ds sera de la forme

$$ds' = A\int \frac{dx}{(1+nx^2)X},$$

A et n étant des constantes faciles à déterminer.

De même pour le second cas.

On a ainsi une infinité de représentations géométriques de l'intégrale de troisième espèce.

Deuxième série. — Le radical U a l'une des trois valeurs suivantes :

$$U = \sqrt{(u^2+p^2)(u^2-q^2)},$$
$$U = \sqrt{(u^2+p^2)(u^2+q^2)},$$
$$U = \sqrt{-(u^2-p^2)(u^2-q^2)}.$$

Dans cette seconde série, l'arc σ est exprimé par une intégrale de première espèce, et l'arc s' par une intégrale de première et une de troisième espèce.

Soit, par exemple,

$$U = \sqrt{(u^2+p^2)(u^2-q^2)};$$

en posant

$$u^2 = \frac{q^2}{1-x^2}, \quad \frac{p^2}{p^2+q^2} = e^2 < 1,$$

on trouve

$$\frac{du}{U} = \frac{e}{q}\frac{dx}{X} \quad \text{et} \quad ds' = A\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+nx^2)X}.$$

Si l'arc σ était donné par la formule

$$d\sigma = a\frac{u^2\,du}{U},$$

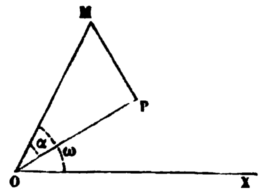
s' serait exprimable au moyen d'une intégrale unique de troisième espèce.

Dans les deux autres cas, le calcul serait tout à fait analogue; mais nous allons étudier plus particulièrement le dernier, qui correspond aux courbes elliptiques (première classe) de M. Serret.

Je rappellerai d'abord la définition géométrique de ces courbes. (*Voir*, par exemple, J.-A. Serret, *Traité de Calcul différentiel et intégral*, t. II.)

Soit n un nombre entier, fractionnaire ou même incommensurable (*fig.* 2), et construisons le triangle OMP tel que $OP = \sqrt{n}$, $MP = \sqrt{n+1}$;

Fig. 2.



puis imaginons que, le sommet O restant fixe, le triangle varie de telle sorte que le cosinus de l'angle formé par le seul côté variable, avec une droite fixe, soit constamment égal au cosinus de l'angle

$$n\,\mathrm{MOP} - (n+1)\,\mathrm{OMP}.$$

Le point M engendrera une courbe dont l'arc sera exprimable en fonction du rayon vecteur par une intégrale elliptique de première espèce réductible au module $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$.

Nous supposerons le centre de notre sphère placé au point O. En conservant toujours les mêmes notations, on a (voir *loc. cit.*)

$$d\sigma = 2\sqrt{n(n+1)}\,\frac{du}{U},$$

où

$$U = \sqrt{-u^4 + 2(2n+1)u^2 - 1},$$

et par suite

$$ds' = \frac{4m\sqrt{n(n+1)}}{U(m^2+u^2)}\,du.$$

Or on peut écrire

$$U = \sqrt{-(u^2-p^2)(u^2-q^2)},$$

en posant

$$p^2 = 2n + 1 - 2\sqrt{n(n+1)},$$

$$q^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}.$$

Faisons maintenant

$$\frac{q^2 - p^2}{q^2} = c^2,$$
$$u^2 = q^2(1 - c^2x^2),$$

on aura, en appliquant la formule (4) et posant $\nu = \frac{-q^2c^2}{m^2 + q^2}$,

$$ds' = \frac{4m\sqrt{n(n+1)}}{q(m^2 + q^2)} \frac{dx}{(1 + \nu x^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - c^2x^2)}}.$$

Posons maintenant $x = \sin\varphi$.

Pour que l'angle φ soit réel, il faut que l'on ait $x^2 < 1$. La formule précédente devient

$$(5) \qquad ds' = \frac{4m\sqrt{n(n+1)}}{q(m^2 + q^2)} \frac{d\varphi}{(1 + \nu \sin^2\varphi)\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}.$$

Cela posé, si l'on désigne par e le rapport $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ et par α l'angle MOP, on trouve

$$\sin\alpha = \frac{U}{2u\sqrt{n}}$$

et

$$(6) \qquad d\sigma = \sqrt{n}\, \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\alpha}}.$$

On peut ramener le module c de la formule (5) au module e qui entre dans la formule (6).

On remarque d'abord facilement que les deux relations

$$c = \frac{2\sqrt{e}}{1 + e},$$
$$\sin(2\varphi - \alpha) = e\sin\alpha$$

sont satisfaites. Donc, en posant

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}, \quad \Delta\alpha = \sqrt{1 - e^2\sin^2\alpha},$$

on a, par une transformation bien connue,

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1 + e}{2} \frac{d\alpha}{\Delta\alpha},$$

ce que l'on peut d'ailleurs vérifier directement.

Si maintenant, dans (5), on remplace $\sin^2\varphi$ par

$$\frac{1}{2}(1 + e\sin^2\alpha - \cos\alpha\Delta\alpha),$$

on obtient

$$ds' = \frac{4m\sqrt{n(n+1)}(1+e)}{q(m^2+q^2)} \frac{d\alpha}{[2+\nu(1+e\sin^2\alpha - \cos\alpha\,\Delta\alpha)]\Delta\alpha}.$$

En posant

$$\nu' = \frac{\nu^2(1+e^2+2e)+4\nu e}{4+4\nu},$$

la formule précédente peut s'écrire

$$ds' = \frac{m\sqrt{n(n+1)}(1+e)}{q(m^2+q^2)(1+\nu)} \frac{2+\nu+\nu e\sin^2\alpha}{(1+\nu'\sin^2\alpha)\Delta\alpha}\,d\alpha.$$

Enfin, par une transformation facile, ds' peut se mettre définitivement sous la forme suivante :

$$(7)\quad ds' = \frac{m\sqrt{n(n+1)}(1+e)}{q(m^2+q^2)(1+\nu)}\left[\frac{\nu e}{\nu'}\frac{d\alpha}{\Delta\alpha} + \frac{(2+\nu)\nu'-\nu e}{\nu'}\frac{d\alpha}{(1+\nu'\sin^2\alpha)\Delta\alpha} + \frac{\nu\cos\alpha\,d\alpha}{(1+\nu'\sin^2\alpha)}\right].$$

De cette façon, ds' s'exprime par une différentielle elliptique de première espèce, une de troisième (*toutes deux de module* e) et une partie algébrique.

On reconnaît immédiatement que l'intégrale de troisième espèce disparaîtra dans l'expression de s', si l'on choisit m de telle sorte que

$$\nu' = \frac{\nu e}{2+\nu};$$

c'est-à-dire en remplaçant ν' par sa valeur

$$\nu^2 + 2\nu + \frac{4e}{(1+e)^2} = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$\nu_1 = \frac{-2e}{1+e}, \quad \nu_2 = \frac{-2}{1+e}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'égalité

$$\nu = -\frac{q^2 c^2}{m^2 + q^2},$$

on trouve pour $\nu = \nu_2$

$$m^2 = q^2 \frac{e-1}{e+1},$$

valeur inadmissible; car elle revient à $m^2 = -1$.

Pour $\nu = \nu_1$, on trouve

$$m^2 = 1 \quad \text{ou} \quad m = \pm 1.$$

Donc l'arc de la perspective de la courbe elliptique s'exprime par l'intégrale elliptique de troisième espèce seule.

Dans la valeur générale de ds', faisons $m = 1$. Si l'on remarque que, pour cette valeur de m, $\nu' = -e^2$, on aura, toutes réductions faites,

$$ds = \sqrt{n}\left[\frac{d\alpha}{\Delta\alpha} - \frac{d(e\sin\alpha)}{1 - e^2\sin^2\alpha}\right];$$

Or (6)

$$d\sigma = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\Delta\alpha};$$

donc

$$d(s-\sigma) = -\sqrt{n}\,\frac{d(e\sin\alpha)}{1 - e^2\sin^2\alpha},$$

ou, en posant

$$\cos\psi = e\sin\alpha,$$

$$d(s-\sigma) = \sqrt{n}\,d(\log\tan\tfrac{1}{2}\psi),$$

ou enfin

$$(8) \qquad s - \sigma = \sqrt{n}\log\tan\tfrac{1}{2}\psi + C.$$

Prenons pour origines des arcs s et σ les points correspondant à la valeur o de l'angle α.

Pour $\alpha = 0$,

$$\cos\psi = 0 \quad \text{ou} \quad \psi = \frac{\pi}{2};$$

donc

$$0 = \sqrt{n}\log\tan\frac{\pi}{4} + C;$$

par suite $C = 0$, et l'on aura simplement

$$s = \sigma + \sqrt{n}\,\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi. \tag{9}$$

On peut encore remarquer que la relation

$$\cos\psi = e\sin\alpha = \sin(2\varphi - \alpha)$$

donne

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha - \varphi,$$

et par conséquent (9) peut s'écrire

$$s = \sigma + \sqrt{n}\,\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} - \varphi\right), \tag{10}$$

les angles α et φ étant liés par l'équation

$$\sin(2\varphi - \alpha) = e\sin\alpha.$$

Les formules précédentes expriment que la différence $s - \sigma$ est rectifiable; elles s'appliquent d'ailleurs aux perspectives des transformées d'une courbe elliptique par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour puissance $m = \pm 1$. Enfin on peut remarquer que le cas de $n = 1$ correspond à la lemniscate.

Des calculs précédents résulte l'identité suivante :

$$\frac{2(1-e)}{1+e}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{2e}{1+e}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - \frac{4e}{(1+e)^2}\sin^2\varphi}}$$
$$= \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\alpha}} + \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} - \varphi\right),$$

avec la condition

$$\sin(2\varphi - \alpha) = \sin\alpha \quad (e < 1).$$

Nous avons rejeté la valeur $m^2 = -1$, comme ne représentant rien géométriquement; mais, comme nous n'avons opéré que par des identités, on peut néanmoins continuer le calcul avec cette valeur. D'ail-

leurs m disparaît comme facteur, et l'on a l'identité suivante :

$$\frac{2(1-e)}{1+e}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left(1-\frac{2}{1+e}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-\frac{4e}{(1+e)^2}\sin^2\varphi}}$$

$$= \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) - e\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}},$$

avec la même condition que plus haut

$$\sin(2\varphi-\alpha) = e\sin\alpha.$$

III. — *Autres exemples.*

J'indiquerai encore deux cas intéressants : celui de l'hyperbole et celui de l'ovale de Cassini.

Hyperbole. — Soit une hyperbole ayant son centre au centre de la sphère. On peut choisir la forme d'équation suivante :

$$u^2 = a^2\operatorname{coséc}^2\varphi + b^2\cot^2\varphi;$$

en posant

$$x = a\operatorname{coséc}\varphi,\quad y = b\cot\varphi,$$

on aura tous les points de la moitié d'une branche en faisant varier φ de $\frac{\pi}{2}$ à o.

On trouve aisément, en suivant toujours les mêmes notations,

$$d\sigma = -\frac{\sqrt{a^2+b^2-a^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$ds' = -\frac{2mk}{a}\,\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

avec

$$k = \frac{a^2}{a^2+b^2},\quad n = \frac{m^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Dans l'expression de s', il entrera une intégrale de troisième espèce et une de première, si l'on choisit pour m la valeur

$$m = \sqrt{b^2-a^2};$$

l'intégrale elliptique de troisième espèce disparaît, et l'on a

$$s' = \frac{2\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{b^2+a^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

en comptant s' à partir du point P' de la sphère, qui correspond à l'infini dans le plan.

Pour que la transformation précédente soit possible, il faut

$$b^2 > a^2,$$

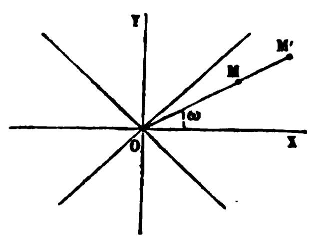
c'est-à-dire que l'angle 2α des asymptotes de l'hyperbole soit obtus. La valeur de s' peut se mettre sous la forme

$$(11) \qquad s' = 2\sqrt{-\cos^2\alpha} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\alpha \sin^2\varphi}}.$$

On peut remarquer que, pour une même valeur de φ, cette intégrale ne dépend que de α et reste la même pour toutes les hyperboles semblables. C'est ce qu'il est facile de démontrer *a priori*.

Considérons une hyperbole quelconque, et soit M un point quelconque de la courbe; si l'angle $MOX = \omega$ reste invariable, tous les

Fig. 3.



points des hyperboles homothétiques situés sur OM correspondent au même angle φ; car on a

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{b}{a}\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}.$$

Cela posé, transformons une quelconque de ces hyperboles par rayons vecteurs réciproques en prenant pour puissance

$$m = \sqrt{b^2-a^2} = a\sqrt{\operatorname{tang}^2\alpha - 1} \quad (\text{si } b > a),$$

ou plus généralement

$$m = af(\alpha).$$

Au point M correspondra M', tel que

$$\overline{OM'}^2 \times \overline{OM}^2 = a^2 [f(\alpha)]^2;$$

or

$$\frac{1}{\overline{OM}^2} = \frac{\cos^2\omega}{a^2} - \frac{\sin^2\omega}{b^2};$$

donc

$$\overline{OM'}^2 = [f(\alpha)]^2 \left(\cos^2\omega - \frac{\sin^2\omega}{\tang^2\alpha}\right).$$

La position de M' est donc indépendante de celle du point M, et par suite la perspective de la courbe, lieu de M', reste invariable.

Remarquons (11) qu'il y a une infinité de courbes sphériques dont l'arc représente, à un facteur constant près, une intégrale elliptique de première espèce, à module moindre que $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Ovale de Cassini. — Pour terminer cette Note, déjà trop longue, j'ajouterai, sans développer les calculs, qui ne présentent d'autre difficulté que leur longueur, que la perspective sphérique d'une lemniscate ou d'une ovale quelconque de Cassini, ou plus généralement d'une transformée quelconque de ces courbes, par rayons vecteurs réciproques, jouit absolument des mêmes propriétés que ces courbes, savoir : qu'un arc (lemniscate) ou la somme et la différence de deux arcs (ovale) s'expriment par une intégrale elliptique qui est de troisième espèce sur la sphère, au lieu d'être de première espèce, comme dans le plan.

MÉMOIRE

SUR LA

REPRÉSENTATION DES TRANSCENDANTES

PAR DES ARCS DE COURBE,

PAR M. ALLÉGRET,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

CHAPITRE I.

MÉTHODE DE JACQUES HERMANN POUR REPRÉSENTER LES QUADRATURES PAR DES ARCS DE COURBE, A UNE QUANTITÉ ALGÉBRIQUE PRÈS. — FORMULES ANALOGUES DE JEAN BERNOULLI.

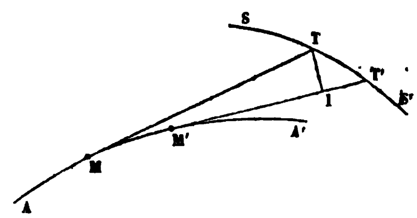
1. On sait depuis longtemps exprimer l'arc d'une courbe par une quadrature; mais le problème inverse, qui consiste à déterminer la courbe algébrique dont l'arc équivaut à une quadrature donnée, offre plus de difficulté. Un savant géomètre du XVIII^e siècle, Jacques Hermann, de Bâle [1], en a, le premier, donné, dans les *Actes de Leipzig* de 1723, une solution que je vais rapporter brièvement.

2. Soient menées deux tangentes successives MT, M'T' à une courbe plane quelconque; elles intercepteront sur une autre courbe donnée SS' un arc infiniment petit TT', dont la projection IT' sur l'une des tangentes exprime la somme des différentielles de l'arc AM et de la tangente MT.

[1] Né en 1678, mort en 1733.

Il suit de là que, si les coordonnées de SS′ sont données arbitrairement en fonction d'une même variable t, et qu'on coupe cette courbe

Fig. 1.



par une série continue de droites TM, T′M′,..., sous un angle dont le cosinus soit égal à $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$, en désignant par $\varphi(t)$ le quotient de TT′ divisé par dt, et par $f(t)$ une fonction algébrique arbitraire; l'enveloppe de TM déterminera une courbe AA′, telle que

$$\text{arc AM} + \text{MT} = \int f(t)\,dt,$$

et dont l'arc indéfini représentera, par suite, la quadrature $\int f(t)\,dt$, à la quantité algébrique près, égale à la tangente MT.

Telle est la solution générale due à Hermann [1].

3. Si l'on prend pour équation en coordonnées polaires de la courbe SS′, entre le rayon vecteur r et l'angle t,

$$r = f(t),$$

le cosinus précédent devient

$$\frac{f(t)\,dt}{ds} = \frac{r\,dt}{ds},$$

en désignant par s l'arc de la courbe SS′. La droite TI passe donc alors

[1] *Actes de Leipzig* de 1723, p. 174. Hermann a fait voir de plus qu'en représentant la quadrature par la somme de deux aires variables qui, dans quelques cas particuliers, forment un rectangle de valeur algébrique, l'arc de la courbe algébrique AA′ exprime non-seulement, à une quantité algébrique près, la quadrature donnée, mais cette courbe peut avoir, en outre, autant d'arcs absolument rectifiables qu'on voudra fixer d'avance.

par le pôle, et la courbe cherchée AA′ est simplement l'enveloppe de la droite TM, menée en M perpendiculairement au rayon vecteur qui aboutit à ce point. C'est la solution que Legendre a présentée beaucoup plus tard comme nouvelle, et dont il a fait diverses applications ([1]).

4. Jean Bernoulli a publié dans les *Actes de Leipzig* ([2]), peu de temps après la découverte d'Hermann, quelques formules analytiques pour résoudre le même problème.

En exprimant les coordonnées rectangulaires x, y de la courbe cherchée en fonction des deux variables u et z, Bernoulli se propose de trouver une relation entre ces dernières, de telle sorte qu'on ait

$$x = \frac{du}{dz}, \quad y = u - z\frac{du}{dz};$$

ce qui donne, pour la différentielle ds de l'arc de la courbe,

$$ds = \sqrt{1+z^2}\,\frac{d^2u}{dz^2}\,dz;$$

d'où il résulte, en intégrant par partie,

$$s = \sqrt{1+z^2}\,\frac{du}{dz} - \int \frac{z\,du}{\sqrt{1+z^2}}$$

ou encore

$$s = -\frac{uz}{\sqrt{1+z^2}} + \sqrt{1+z^2}\,\frac{du}{dz} + \int \frac{u\,dz}{\sqrt{(1+z^2)^3}}.$$

Bernoulli pose ensuite, dans la première expression,

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = p,$$

ce qui fait dépendre l'arc s de la quadrature $\int p\,du$. Comme on sup-

---

([1]) On lit, p. 591, t. II du *Traité des Fonctions elliptiques :* « Ainsi la quadrature d'une courbe algébrique peut toujours se réduire à la rectification d'une autre courbe, *proposition dont l'inverse seulement était connue.* » Ces dernières paroles autorisent à penser que Legendre n'a pas eu connaissance des travaux de ses prédécesseurs, notamment d'Euler, sur ce sujet.

([2]) Année 1724. *Voir* aussi *OEuvres de Jean Bernoulli,* t. II, p. 582.

pose p donné en fonction de u, l'équation précédente fait connaître u en fonction de z. Le problème est ainsi résolu.

Mais la solution se simplifie un peu en faisant

$$\frac{u}{\sqrt{(1+z^2)^3}} = f(z),$$

et en exprimant l'arc au moyen de la seconde expression.

On trouve, dans ce cas, pour formules définitives,

$$u = f(z)\sqrt{(1+z^2)^3},$$

$$x = \frac{du}{dz}, \quad y = u - z\frac{du}{dz} \quad \text{et} \quad s = 2z(1+z^2)f(z) + (1+z^2)^2 f'(z) + \int f(z)\,dz$$

5. Si l'on fait dans ces dernières

$$z = \operatorname{tang}\theta \quad \text{et} \quad f(z) = \varphi(\theta)\cos^3\theta,$$

en prenant pour nouvelle variable θ, elles se transforment dans les suivantes :

$$u = \frac{\varphi(\theta)}{\cos\theta},$$

$$x = \cos^2\theta\,\frac{du}{d\theta}, \quad y = u - \sin\theta\cos\theta\,\frac{du}{d\theta}$$

ou, en développant les calculs,

$$x = \cos\theta\,\varphi'(\theta) + \sin\theta\,\varphi(\theta), \quad y = \cos\theta\,\varphi(\theta) - \sin\theta\,\varphi'(\theta)$$

et

$$s = \varphi'(\theta) + \int \varphi(\theta)\,d\theta.$$

Ce sont précisément les formules que Legendre a données à la fin de son *Traité des Fonctions elliptiques* [1]; elles se déduisent facilement, comme on voit, des précédentes, et plus rapidement encore de la remarque du n° 3.

6. Je me bornerai, comme exercice, à appliquer directement la solution donnée à la fin du n° 4 à la représentation de la fonction elliptique

[1] T. II, p. 588.

de première espèce ou à l'intégrale

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}} = F(c, \varphi).$$

En posant

$$b^2 = 1 - c^2 \quad \text{et} \quad z = b \operatorname{tang}\varphi,$$

elle se change en

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}\sqrt{z^2 + b^2}}.$$

L'application des formules trouvées donne ensuite sans difficulté

$$u = \frac{1 + z^2}{\sqrt{z^2 + b^2}},$$

$$x = \frac{du}{dz} = \frac{\sin\varphi}{b^2}(b^2 - c^2\cos^2\varphi),$$

$$y = u - z\frac{du}{dz} = \frac{\cos\varphi}{b}(1 + c^2\sin^2\varphi),$$

$$s = -\frac{uz}{\sqrt{1 + z^2}} + \sqrt{1 + z^2}\frac{du}{dz} + F(c, \varphi) = F(c, \varphi) - \frac{c^2}{b^2}\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta(\varphi),$$

en posant, avec Legendre,

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}.$$

Ces valeurs coïncident avec celles que ce savant a données dans son *Traité* (¹). Elles déterminent une courbe de sixième degré, étudiée par divers géomètres (²).

(¹) T. Iᵉʳ, p. 36 et 37; t. II, p. 590.

(²) Outre Legendre, Talbot dans les *Annales de Gergonne;* Tortolini dans le *Journal de Crelle*, t. 33 p. 90, etc.

CHAPITRE II.

EXPOSÉ D'UNE AUTRE MÉTHODE POUR RÉSOUDRE COMPLÈTEMENT LE MÊME PROBLÈME DANS UN GRAND NOMBRE DE CAS.

7. Les règles que nous venons de rappeler introduisent une fonction algébrique qu'il faut ajouter à l'arc indéfini de la courbe obtenue pour avoir la valeur de la quadrature donnée; elles sont donc insuffisantes quand on demande de faire correspondre exactement entre eux l'arc et la quadrature. Ce second problème a aussi depuis longtemps attiré l'attention des géomètres. On trouve dans les *Œuvres* des deux frères Bernoulli, Jean et Jacques (1), ainsi que dans de nombreux Mémoires d'Euler (2), la solution de quelques cas particuliers de ce problème, et en même temps le témoignage des efforts infructueux tentés dans d'autres, qui ne paraissent pas, au premier abord, plus difficiles (3). C'est ainsi qu'Euler déclare, dans un de ses Mémoires, qu'après avoir obtenu une infinité de courbes algébriques dont les arcs sont respectivement égaux à ceux d'une ellipse ou d'une parabole donnée, il n'a pas pu découvrir de courbe différente de l'hyperbole, et dont l'arc fût représenté par la même transcendante (4). Le même géomètre affirme ailleurs que, quoique l'arc de parabole soit exprimable par la somme d'une fonction algébrique et d'une *fonction logarithmique,* il est cependant impossible de trouver une courbe algébrique dont l'arc soit simplement égal à une

---

(1) *Œuvres de Jacques Bernoulli,* t. II, n° 103, et t. Ier, nos 59 et 60; *Œuvres de Jean Bernoulli,* t. IV, p. 92; Mémoire : *De transformationibus et rectificationibus curvarum.*

(2) *Opera postuma,* Saint-Pétersbourg, 1862, t. Ier, p. 439 : *De lineis curvis quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur,* t. XI des *Mémoires de Saint-Pétersbourg,* p. 94 à 125, etc.

(3) *Postquam in hoc argumento plurimum elaborassem, nullam tamen hujusmodi curvam elicere potuerim.* Euler, *Mémoires de Saint-Pétersbourg,* t. XI, p. 114.

(4) *Nullam adhuc investigare mihi licuit ejusmodi curvam algebricam, cujus rectificatio cum hyperbola conveniret. Mémoires de Saint-Pétersbourg,* t. XI, p. 95 (20 août 1781). Le même aveu se retrouve aussi à la fin d'un autre Mémoire, *Nova acta,* t. V, p. 85. Cette question a été traitée depuis par N. Fuss, *Nova acta,* t. XIV; mais ce dernier géomètre ne paraît avoir considéré que le cas particulier où l'hyperbole est équilatère, qui est beaucoup plus facile. On trouvera plus loin (60) la solution complète du cas général.

fonction *logarithmique* (¹). Euler avait aussi nié, en même temps, l'existence d'aucune courbe algébrique dont l'arc fût identique à un arc de cercle, et ce n'est que dans un de ses derniers Mémoires qu'il a signalé lui-même un nombre infini de courbes jouissant de cette propriété (²).

8. Depuis Euler, ces sortes de questions ont été un peu délaissées par les géomètres. MM. William Roberts et J.-A. Serret ont cependant fait connaître, il n'y a pas très-longtemps, de nouveaux théorèmes sur la représentation par des arcs de courbe de diverses transcendantes elliptiques (³). Le dernier de ces deux savants est aussi revenu, dans un de ses Mémoires, sur le problème de la détermination des courbes algébriques dont l'arc est identique à un arc de cercle, déjà traité antérieurement par Euler et Fuss (⁴).

Nous allons, dans ce qui va suivre, exposer les divers résultats connus jusqu'ici, en cherchant à leur donner une plus grande extension.

9. Supposons, en premier lieu, qu'il s'agisse de trouver une courbe plane dont l'arc indéfini soit exprimé par la fonction transcendante

$$\int (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^p d\varphi,$$

où φ désigne un angle variable et a une constante quelconque. Cette fonction, pour des valeurs particulières attribuées à l'exposant commensurable p, comprend les formes les plus connues. On sait que le trinôme $1 + a^2 - 2a\cos\varphi$ est décomposable en deux facteurs imagi-

---

(¹) J'appelle ainsi, pour abréger, le logarithme d'une fonction algébrique. Voir *Opuscula analytica*, t. II, p. 76. *Opera postuma*, t. I, p. 586. Lettre d'Euler à Lagrange, datée de 1775.

(²) *Maxime obstupui*, dit-il à ce propos. Voici encore comment Euler s'exprime au commencement de son Mémoire : *Non dubitavi ante aliquot annos istam propositionem tanquam insigne theorema in medium proferre : quod præter circulum nulla detur curva algebrica cujus arcubus omnibus æquales arcus circulares assignari queant.... Sententiam igitur meam hic solenniter retractans, methodum facilem exponam cujus ope innumerabiles curvæ algebricæ inveniri possunt quarum omnes arcus circularibus sunt æquales*. T. XI, *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, p. 114.

(³) *Journal de M. Liouville*, passim, 1re série, principalement les tomes X et XI.

(⁴) XXXVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 69. *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, t. XI, p. 114 et 274.

naires conjugués, et qu'on a

$$1 + a^2 - 2a\cos\varphi = (e^{\varphi\sqrt{-1}} - a)(e^{-\varphi\sqrt{-1}} - a).$$

Appelons maintenant z l'exponentielle imaginaire $e^{\varphi\sqrt{-1}}$, et prenons cette quantité pour nouvelle variable; il viendra

$$e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1}{z}, \quad dz\, d\left(\frac{1}{z}\right) = (d\varphi)^2.$$

et, par suite,

$$(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{2p}(d\varphi)^2 = (z - a)^{2p} dz \left(\frac{1}{z} - a\right)^{2p} d\left(\frac{1}{z}\right).$$

Si donc, x et y étant les coordonnées rectangulaires de la courbe cherchée et m un exposant commensurable quelconque, on pose

$$dx + dy\sqrt{-1} = z^m (z - a)^{2p} dz,$$

comme le changement de signe de $\sqrt{-1}$ correspond au changement de z en $\frac{1}{z}$, la différentielle de l'arc s de la courbe satisfera à la condition demandée

$$ds = (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^p d\varphi.$$

Quant à la courbe, elle sera complétement déterminée par l'équation

$$x + y\sqrt{-1} = \int z^m (z - a)^{2p} dz,$$

où il suffira d'identifier les parties réelles et imaginaires des deux membres.

La condition nécessaire et suffisante pour que cette courbe soit algébrique est que l'intégrale précédente le soit aussi. Cela aura lieu si l'un des deux nombres m ou $2p$ est entier ou positif, pourvu que l'autre ne soit pas un nombre entier négatif; ou bien encore si, p et m étant tous deux fractionnaires, l'expression

$$2 + 2p + m$$

est un nombre entier négatif. Dans ce dernier cas, l'intégrale peut, en

effet, se mettre sous la forme

$$\int \left(\frac{1}{z}\right)^{-2-2p-m} \left(1-\frac{a}{z}\right)^{2p} d\left(\frac{1}{z}\right),$$

et devient algébrique en posant

$$1-\frac{a}{z}=u.$$

10. Lorsque $2p$ est un nombre entier négatif, l'intégrale est encore algébrique, pourvu que m ait une valeur entière et positive inférieure à $-2p-1$. Pour $2p=-1$, aucune courbe algébrique ne serait obtenue par cette méthode, et, en ajoutant l'hypothèse $m=0$, on obtiendrait une courbe transcendante, dont l'équation est

$$x+y\sqrt{-1}=\int \frac{dz}{z-a}=\mathrm{L}(z-a).$$

Cette courbe n'est autre que celle que Legendre a considérée au Chapitre VII du *Traité des Fonctions elliptiques* [1]. L'équation finie de cette dernière est susceptible d'être mise sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\cos y=\frac{\sqrt{1-a^2}}{2a}(e^x-e^{-x})$$

ou

$$\cos y=\frac{\sqrt{a^2-1}}{2a}(e^x-e^{-x}),$$

selon que a est plus petit ou plus grand que l'unité. Pour $a=1$, l'équation se réduit à

$$\cos y=e^x,$$

courbe transcendante dont l'arc exprime une fonction logarithmique et dont le rayon de courbure jouit de la propriété d'avoir une projection constante sur l'axe des x. L'arc des courbes précédentes représente la fonction elliptique de première espèce au module a ou $\frac{1}{a}$, ainsi que Legendre l'a observé.

---

(1) T. Ier, p. 40.

11. L'intégrale

$$\int (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^p d\varphi$$

se simplifie beaucoup en supposant $a = \pm 1$. Pour $a = -1$, elle se réduit à

$$2^{2p+1}\int \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{2p} \frac{d\varphi}{2},$$

qui équivaut à

$$2^{p+1}\int (\cos\varphi)^p d\varphi,$$

par le changement de $2p$ et $\frac{\varphi}{2}$ en p et φ.

La courbe correspondante devient alors, après cette substitution,

$$x + y\sqrt{-1} = \int z^m (z+1)^p dz,$$

et en faisant

$$z = e^{2\varphi\sqrt{-1}}$$

on aura pour différentielle de l'arc s

$$ds = 2^{p+1}(\cos\varphi)^p d\varphi.$$

Cette nouvelle courbe sera algébrique pour toutes les valeurs positives entières de m et les valeurs commensurables de p (les nombres entiers négatifs exceptés). Il en serait encore de même si, m et p étant fractionnaires,

$$2 + p + m$$

était un nombre entier négatif (*voir* n° 9).

12. La même intégrale est quelquefois susceptible, dans le cas général ou dans le cas particulier que nous venons de considérer, d'être mise sous cette forme simple :

$$z^n(z+1)^p \quad \text{ou} \quad z^n(z-a)^p,$$

en désignant ici uniformément par z l'exponentielle $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ et par n et p deux nombres constants quelconques. On obtient ainsi certaines courbes épicycloïdales que nous retrouverons plus loin, et qui méritent de nous arrêter quelques instants.

13. Soit d'abord

$$x + y\sqrt{-1} = z^n(z+1)^p;$$

la différentiation donne

$$dx + dy\sqrt{-1} = z^{n-1}(z+1)^{p-1}[(n+p)z + n]\,dz;$$

l'arc s de la courbe équivaut donc à l'une ou l'autre des intégrales

$$2^p \int \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{p-1} \sqrt{(2n+p)^2 - 4n(n+p)\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,\frac{d\varphi}{2}$$

ou

$$2^p \int \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{p} \sqrt{(2n+p)^2 + p^2\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}}\,\frac{d\varphi}{2}.$$

En posant dans la première $\sin\frac{\varphi}{2} = x$ et dans la seconde $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = y$, elles reviennent aux transcendantes

$$(2n+p)2^p \int (1-x^2)^{\frac{p}{2}-1} \sqrt{1 - \frac{4n(n+p)}{(2n+p)^2}x^2}\,dx$$

et

$$(2n+p)2^p \int (1+y^2)^{-\frac{p}{2}-1} \sqrt{1 + \left(\frac{p}{2n+p}y\right)^2}\,dy,$$

dont la courbe précédente offre ainsi une représentation parfaite.

14. Supposons ensuite

$$x + y\sqrt{-1} = z^n(z-a)^p;$$

il viendra de même

$$dx + dy\sqrt{-1} = z^{n-1}(z-a)^{p-1}[(n+p)z - na]\,dz,$$

ce qui donne lieu de considérer successivement deux cas différents. Le premier consiste à poser

$$n + p = na^2.$$

L'arc est alors égal à la transcendante

$$na\int (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{\frac{p}{2}}\,d\varphi,$$

dont on a ainsi une infinité de nouvelles représentations.

15. Faisant en second lieu

$$n + p = \pm na,$$

l'arc s'exprimera par

$$4na\int(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{\frac{p-1}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\varphi}{2}$$

ou par

$$4na\int(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{\frac{p-1}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\varphi}{2},$$

suivant qu'on prendra le signe supérieur ou inférieur, en supposant a essentiellement positif.

Ces intégrales se ramènent à une autre forme, en posant

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1+a}{2\sqrt{a}}\sin\psi \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1-a}{2\sqrt{a}}\operatorname{tang}\psi;$$

elles deviennent respectivement

$$2n\sqrt{a}(1+a)^p\int\cos\psi^p\,d\psi \quad \text{et} \quad 2n\sqrt{a}(1-a)^p\int\frac{d\psi}{\cos\psi^{p+1}}.$$

16. On peut encore donner une représentation plus générale par des arcs de courbe de la transcendante

$$\int(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^p\,d\varphi,$$

en exceptant le cas de $a = \pm 1$. Posons pour cela

$$dx + dy\sqrt{-1} = \frac{z^m(1 - az)^{2p+n}}{(z-a)^n}\,dz,$$

m et n désignant deux nombres entiers positifs quelconques et z l'exponentielle $e^{\varphi\sqrt{-1}}$. Il viendra, pour la différentielle de l'arc s,

$$ds = (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^p\,d\varphi,$$

et, pour équation de la courbe,

$$x + y\sqrt{-1} = \int\frac{z^m(1 - az)^{2p+n}}{(z-a)^n}\,dz.$$

La courbe sera algébrique lorsque l'intégration pourra être effectuée algébriquement. Supposons $2p$ entier positif ou, dans le cas contraire de $2p$ entier et négatif, $2p+n>0$ et $m<-2p$, conditions qu'il est facile de réaliser; on s'assure aisément que l'intégrale précédente sera algébrique (en faisant $z=a+x$), si l'expression suivante

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(a+x)^m(1-a^2-ax)^{2p+n}]$$

s'annule avec x. Cela revient à dire, en posant

$$u=a(a+x),$$

que l'équation

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[u^m(1-u)^{2p+n}]=0$$

doit admettre parmi ses racines la valeur

$$u=a^2.$$

Le carré du nombre a ne peut donc pas, comme on voit, être choisi arbitrairement.

17. Le même résultat est susceptible d'être étendu à des valeurs commensurables quelconques de p. Cette méthode est encore applicable à la transcendante

$$\int d\varphi(\cos\varphi)^p,$$

déjà examinée, et à d'autres transcendantes beaucoup plus compliquées, telles que

$$\int d\varphi(1+a^2-2a\cos\varphi^p(\cos q\varphi)^r.$$

Dans ce dernier cas, la condition, pour que l'équation de la courbe cherchée mise sous la forme

$$x+y\sqrt{-1}=\int\frac{z^m(1-az)^{2p+n}(z^{2q}+1)^r\,dz}{(z-a)^n}$$

soit algébrique, consiste en ce que la valeur $u=a^2$ doit être choisie parmi les racines de l'équation algébrique

$$\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}[u^m(1-u)^{2p+n}(u^{2q}+a^{2q})^r]=0.$$

Mais, sans insister sur les nouvelles formules auxquelles on serait ainsi conduit, et dont la discussion offrirait bientôt d'ailleurs une grande complication, nous nous contenterons d'examiner les cas les plus simples de celles que nous avons données antérieurement.

CHAPITRE III.

APPLICATION DE LA MÉTHODE A QUELQUES EXEMPLES.

18. Nous commencerons par déterminer, après Euler, quelles sont les courbes algébriques dont l'arc est identique à un arc de parabole.

En prenant pour équation de la parabole, en coordonnées rectangulaires,

$$y^2 = 2ax,$$

on trouve, pour différentielle de l'arc de cette courbe,

$$ds = \frac{dy}{a}\sqrt{a^2+y^2};$$

posant ensuite

$$y = a \operatorname{tang} \varphi,$$

il vient

$$ds = \frac{a\,d\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Les formules du n° 15 fournissent deux solutions du problème, en faisant $p=2$ ou $p=-3$. En supposant en outre $p=-2$ dans la seconde expression du n° 13, on satisfait encore à la condition demandée. On obtient ainsi les trois classes de courbes algébriques suivantes :

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{(z-a)^2}{z^{\frac{2}{1+a}}} = z^n(nz+n+2)^2,$$

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{z^{\frac{2}{1-a}}}{(z-a)^3} = \frac{z^n}{[nz-(n-3)]^3}$$

et

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{z^n}{(z+1)^2},$$

dans lesquelles l'exposant n désigne un nombre commensurable quelconque et la variable z l'exponentielle imaginaire $e^{\varphi\sqrt{-1}}$.

19. Les dernières courbes se confondent avec celles qu'Euler a définies, dans un de ses Mémoires, par les deux équations (¹)

$$x = \frac{2}{n^2}\,\frac{\cos n\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad y = \frac{2}{n^2}\,\frac{\sin n\varphi}{\cos^2\varphi};$$

car on en déduit par un calcul facile, en faisant $z = e^{2\varphi\sqrt{-1}}$ et $n' = \frac{2+n}{2}$,

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{2}{n'-1}\,\frac{z^{n'}}{(z-1)^2},$$

et cette équation n'est autre que la troisième classe du numéro précédent.

20. On sait que la différentielle de l'arc de la lemniscate, en fonction du rayon vecteur r mené du centre, est

$$ds = \frac{a^2\,dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

Cette expression devient, en posant $r = a\cos\varphi$,

$$ds = \frac{a\,d\varphi}{2\sqrt{\cos\varphi}}.$$

On peut donc lui appliquer la formule du n° 11, qui devient ici, en faisant $p = -\frac{1}{2}$ et $z = e^{2\varphi\sqrt{-1}}$,

$$x + y\sqrt{-1} = \sqrt{2}\int z^m (z+1)^{-\frac{1}{2}}\,dz.$$

Cette courbe sera algébrique pour toute valeur entière de m, ainsi

(¹) Euler a traité cette question dans plusieurs Mémoires. *Voir* t. V, *Nova acta*, p. 59, et t. XI, *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, p. 100 et 106. Les équations que je rappelle ici sont tirées des *Opera postuma*, Pétersbourg, 1862, t. Ier, p. 451. On peut rapprocher de ce numéro les 53e et 55e de ce Mémoire.

que pour les valeurs négatives fractionnaires égales à la moitié d'un nombre entier impair plus grand que l'unité ([1]).

21. Considérons maintenant quelques cas particuliers de la transcendante

$$\int d\varphi(1+a^2-2a\cos\varphi)^{\frac{p}{2}}.$$

Pour $p=1$, elle donne un arc d'ellipse; pour $p=-2$, un arc de cercle; pour $p=-1$, la fonction elliptique de première espèce la plus générale.

La formule du n° **14** devient, dans les deux derniers cas,

$$x+y\sqrt{-1}=\frac{z^n}{(z-a)^2} \quad \text{ou} \quad x'+y'\sqrt{-1}=\frac{z^{n'}}{z-a},$$

la constante a étant déterminée par l'une ou l'autre des valeurs

$$a=\sqrt{\frac{n-2}{n}} \quad \text{ou} \quad a=\sqrt{\frac{n'-1}{n'}},$$

qui coïncident, en supposant $n=2n'$. Les premières courbes, algébriques pour toute valeur commensurable de n, sont précisément celles qu'Euler a fait connaître le premier dans un Mémoire inséré au tome XI des *Mémoires de Saint-Pétersbourg* ([2]). M. J.-A. Serret a obtenu les secondes pour représenter le plus simplement possible la fonction elliptique au module

$$\sqrt{\frac{n'-1}{n'}},$$

dans lequel n' est commensurable. Ces dernières courbes sont donc liées à celles d'Euler par la relation exponentielle

$$(x'+y'\sqrt{-1})^2=x+y\sqrt{-1}.$$

Quant aux autres courbes que M. J.-A. Serret a signalées comme satis-

---

([1]) Euler a considéré quelques-unes de ces courbes : *Opera postuma*, t. Ier, p. 444, paragraphe *De Curva lemniscata*.

([2]) Page 114.

faisant aux mêmes conditions, elles rentrent, comme cas particulier, dans celles qui ont été données au n° 16 du Chapitre précédent, où il suffit de faire successivement $2p = -2$ et $2p = -1$ (¹). Nous démontrerons plus loin (n° 72) la possibilité de solutions encore plus générales.

22. La détermination des courbes algébriques dont les arcs sont égaux à ceux d'un cercle peut encore être effectuée d'une manière différente, au moyen de la seconde formule du n° 15, dans laquelle on fait $p = -1$, en supposant en même temps n positif et plus petit que l'unité. Il vient alors

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{z^n}{z - \frac{1-n}{n}},$$

la variable z étant toujours égale à $e^{\varphi\sqrt{-1}}$. En posant ensuite

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{2n-1}{2\sqrt{n(1-n)}}\tang\psi,$$

on trouve, pour expression de l'arc s,

$$s = 2\frac{n\psi}{2n-1}\sqrt{n(1-n)},$$

qui est ainsi proportionnel à l'angle ψ. L'arc de cette courbe présente cependant en ses points de rebroussement, pour les valeurs de φ qui sont multiples de π, une espèce de discontinuité dont nous parlerons plus loin (n° 65).

23. Si l'on fait de même $p = -1$ dans la première des formules du n° 15, en donnant maintenant à n des valeurs commensurables positives plus grandes que l'unité ou des valeurs négatives plus petites que l'unité, en valeur absolue, l'équation de la courbe deviendra

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{z^n}{z - \frac{n-1}{n}},$$

(¹) *Voir* XXXVᵉ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 76, et *Journal de Liouville*, 1ʳᵉ série, t. XI, p. 357.

en supposant toujours

$$z = e^{\varphi\sqrt{-1}}.$$

Faisant ensuite (n° 15)

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{2n-1}{2\sqrt{n(n-1)}}\sin\psi,$$

on trouvera, pour l'expression de l'arc s,

$$s = \frac{2n}{2n-1}\sqrt{n(n-1)}\,\mathrm{L}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right).$$

Comme les lignes trigonométriques de l'angle ψ se déduisent algébriquement des coordonnées de la courbe, on obtient ainsi une solution du problème dont il a été question au n° 7. Cette dernière formule démontre, contrairement à l'assertion d'Euler, l'existence de courbes algébriques dont l'arc indéfini est exprimable par une fonction logarithmique des coordonnées de l'extrémité variable de l'arc.

Les mêmes courbes offrent du reste, en leurs points de rebroussement, la discontinuité que nous avons signalée dans les précédentes, et sur laquelle nous reviendrons.

24. Si l'on fait $p = -1$ dans l'expression donnée au n° 13, on trouverait également une représentation simple de la transcendante égale à l'arc d'hyperbole, au moyen de nouvelles courbes algébriques. Nous avons déjà remarqué plus haut (n° 19) que les mêmes formules donnent, pour $p = -2$, les courbes paraboliques découvertes autrefois par Euler.

Nous ne poursuivrons pas davantage cette énumération des cas particuliers compris dans les formules du Chapitre précédent; nous préférons y substituer l'étude directe de certaines courbes dérivées géométriquement de courbes connues. Nous compléterons ensuite la solution analytique précédente en montrant, à la fin de ce Mémoire, comment elle peut être appliquée à une somme quelconque des intégrales considérées. On aura ainsi une représentation exacte, par des arcs de courbes algébriques, de la transcendante très-complexe

$$m\int d\varphi(1+a^2-2a\cos\varphi)^p \pm m'\int d\varphi'(1+a'^2-2a'\cos\varphi')^{p'}$$
$$\pm m''\int d\varphi''(1+a''^2-2a''\cos\varphi'')^{p''}+\ldots,$$

où $m, m', \ldots, a, a', \ldots, p, p', \ldots$ sont des constantes susceptibles de prendre une infinité de valeurs différentes, et où les variables $\varphi, \varphi', \ldots$ sont assujetties à satisfaire à certaines conditions particulières qui facilitent la solution du problème.

CHAPITRE IV.

TRANSFORMATION EXPONENTIELLE DE MACLAURIN. EXPRESSION DE L'ARC INDÉFINI DES COURBES ORTHOGÉNIDES OU DÉRIVÉES DE LA LIGNE DROITE.

25. Maclaurin a fait connaître, il y a longtemps, notamment dans son *Traité des fluxions* (¹), un procédé ingénieux pour déduire d'une courbe plane donnée une infinité d'autres courbes.

En appelant r et θ les coordonnées polaires de la première courbe, r' et θ' celles de la courbe dérivée, rapportée au même axe et au même pôle, cette transformation, que nous appellerons *exponentielle*, consiste à poser simultanément

$$r' = r^n,$$
$$\theta' = n\theta,$$

en désignant par n un nombre commensurable quelconque, positif ou négatif, qui représente l'*ordre* ou l'*exposant de dérivation*.

Il est visible que la tangente menée aux points correspondants des deux courbes fait un même angle avec le rayon vecteur aboutissant au point de contact, car la tangente trigonométrique de cet angle est donnée par les rapports égaux

$$\frac{r'\,d\theta'}{dr'} = \frac{nr^n\,d\theta}{nr^{n-1}\,dr} = \frac{r\,d\theta}{dr}.$$

Les différentielles des arcs s et s' des deux courbes satisfont, de plus, à l'équation

$$ds' = nr^{n-1}\,ds.$$

(¹) Édimbourg, 1742. *Voir* Chap. XI, t. Iᵉʳ, p. 330, les corollaires 3, 4 et 5 de la proposition XXXIV.

Ce qui donne, en supposant $ds' = f(r')\,dr'$,

$$ds = f(r^n)\,dr.$$

Toutes ces relations, fort simples, nous seront utiles.

26. Appliquons d'abord ce mode de dérivation à la droite dont l'équation polaire est, comme on sait,

$$r = \frac{a}{\cos\theta}.$$

En prenant $\frac{1}{n}$ pour ordre de la courbe dérivée que nous appellerons dorénavant une *orthogénide*, il viendra, pour équation polaire de cette courbe, en vertu de la remarque faite plus haut,

$$r'^n = \frac{a^n}{\cos n\theta'};$$

l'élément différentiel ds de la droite étant

$$ds = \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - a^2}},$$

celui de l'arc d'orthogénide d'ordre $\frac{1}{n}$ ou $-\frac{1}{n}$ sera

$$ds' = \frac{1}{n}\,\frac{a\,d\theta}{\cos^{\frac{n+1}{n}}\theta} = \frac{r^n\,dr}{\sqrt{r^{2n} - a^{2n}}}$$

ou

$$ds' = \frac{a}{n}\cos^{\frac{1-n}{n}}\theta\,d\theta = \frac{a^n\,dr}{\sqrt{a^{2n} - r^{2n}}}.$$

Ces sortes de courbes ont déjà été étudiées, dans le siècle dernier, par Maclaurin et par Fagnano (¹). Elles donnent, comme on voit, par leurs

---

(¹) *Transactions philosophiques de* 1718, n° 356. *Voir* aussi plusieurs Chapitres du *Traité des fluxions*, notamment le n° 810, Chap. IV, Livre II.

Fagnano a également considéré les mêmes courbes dans plusieurs Mémoires *Sur les courbes dont les rayons vecteurs menés à un point fixe font avec l'axe un angle qui soit dans un rapport commensurable avec celui que fait la normale avec le même axe*. (*Produzioni matematiche*, t. II, p. 375. Pesaro, 1750.)

Il est facile de s'assurer que les courbes algébriques définies ainsi dans le titre des Mémoires de Fagnano se confondent avec nos *orthogénides*.

arcs la représentation exacte de la transcendante

$$\int d\theta \cos^p(\theta),$$

dans laquelle l'exposant p peut recevoir toutes les valeurs commensurables possibles, à l'exception toutefois de $p = -1$, qui correspond, comme limite, à l'*orthogénide singulière* transcendante, dont l'équation en coordonnées rectilignes rectangulaires est

$$\cos y = e^x$$

(*voir* n° 10), et que nous nous bornons à rappeler ici.

27. L'expression générale de l'arc des courbes précédentes montre que les orthogénides d'ordre pair négatif sont absolument rectifiables. La rectification des orthogénides d'ordre impair négatif dépend de la quadrature du cercle, tandis que celle des orthogénides d'ordre entier positif, pair ou impair, dépend d'une fonction logarithmique, à laquelle il faut joindre, de même que dans le cas précédent, une fonction algébrique. Lorsque l'ordre de dérivation est fractionnaire, on peut distinguer les valeurs particulières suivantes :

$$-\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{3},$$

où l'arc représente, à un facteur numérique près, lcs quadratures

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}, \quad \int \frac{d\theta}{\sqrt[3]{\cos^2\theta}}, \quad \int \frac{d\theta}{\sqrt[3]{\cos\theta}}$$

ou encore

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}.$$

Si l'on change respectivement, dans ces trois dernières intégrales, x en $\frac{1}{y}$, en $\frac{1}{y^2}$ ou en $\frac{1}{\sqrt{y}}$, elles se transforment en

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^4-1}}, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y^6-1}}, \quad \text{et} \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y^3-1}}.$$

Ces six dernières intégrales expriment des cas particuliers de la fonction elliptique de première espèce.

Mentionnons encore deux autres orthogénides d'ordre

$$-\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{3}{4},$$

dont l'arc s'exprime par les deux transcendantes elliptiques connues

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^6}}.$$

La première équivaut à l'ordonnée de la célèbre courbe élastique, considérée pour la première fois par Jacques Bernoulli, et dont la construction a fait l'objet des recherches des frères Bernoulli, de Maclaurin (1) et de Fagnano (2).

CHAPITRE V.

ÉTUDE ANALOGUE RELATIVEMENT A LA CLASSE DES COURBES CYCLOGÉNIDES OU DÉRIVÉES DU CERCLE.

28. Je passe à une seconde classe de courbes, dérivées d'un cercle quelconque, par la méthode de Maclaurin, et que j'appellerai de même *cyclogénides*. L'équation polaire de ces courbes affecte deux formes différentes, selon que le pôle est situé à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle primitif; et il n'y a pas d'ailleurs lieu de placer ce pôle sur le cercle même, car les courbes dérivées se confondraient alors avec les orthogénides dont nous avons formé une classe distincte.

Dans le premier cas, le cercle a pour équation polaire

$$r^2 - 2\,\text{tang}\,\alpha\, r \sin\theta - 1 = 0,$$

en convenant de prendre pour axe polaire la direction de la corde divisée par le pôle en deux parties égales, pour unité de longueur la

---

(1) N° 927 du *Traité des fluxions*.

(2) *Produzioni matematiche*. *Voir*, à ce sujet, à la fin de l'Ouvrage une revendication de priorité, un peu aigre, en faveur de Fagnano.

moitié de cette corde, et enfin pour α l'angle constant que fait avec cette corde le rayon mené à son extrémité.

J'introduirai maintenant, pour simplifier les calculs, l'angle variable φ que fait un rayon quelconque de ce cercle avec le diamètre passant par le pôle; ce qui donne, entre φ et r, cette relation

$$\cos^2\alpha\, r^2 = 1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi,$$

qui s'établit immédiatement, en observant que le rayon du cercle, d'une part, et la distance de son centre à l'axe, d'autre part, ont respectivement pour valeurs

$$\frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \tang\alpha.$$

Il vient, par suite, pour la différentielle de l'arc de cercle s,

$$ds = \frac{d\varphi}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{2r\,dr}{\sqrt{-1+2\frac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}r^2 - r^4}},$$

d'où l'on déduit, pour l'arc s' d'une cyclogénide quelconque d'ordre $\frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned} ds' = \frac{ds}{n} r^{\frac{n-1}{n}} &= \frac{1}{n}\frac{d\varphi}{(\cos\alpha)^{\frac{1}{n}}}(1+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\varphi)^{\frac{1-n}{2n}} \\ &= \frac{1}{\cos\alpha}\frac{2r'^n\,dr'}{\sqrt{-1+2\frac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}r'^{2n} - r'^{4n}}} \\ &= \frac{2}{\cos\alpha}\frac{dr'}{\sqrt{2\frac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} - (r'^{2n} + r'^{-2n})}}, \end{aligned}$$

et l'on aura, de plus, pour l'équation polaire de la même courbe

$$r'^{2n} - 2\tang\alpha\, r'^n \sin n\theta' - 1 = 0.$$

29. Dans le second cas, où le pôle est extérieur au cercle primitif, nous conviendrons de prendre pour axe polaire le diamètre passant par le pôle, pour unité de longueur la tangente menée du pôle, et nous désignerons par α l'inclinaison de cette tangente sur l'axe polaire. Dans

ces hypothèses, l'équation du cercle devient

$$r^2 - 2r\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} + 1 = 0.$$

En introduisant encore l'angle variable auxiliaire φ qu'un rayon quelconque du cercle fait avec l'axe, et en observant que $\operatorname{tang}\alpha$ et $\frac{1}{\cos\alpha}$ désignent alors respectivement le rayon du cercle et la distance du centre au pôle, on aura de même

$$r^2\cos^2\alpha = 1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi,$$

$$ds = \operatorname{tang}\alpha\, d\varphi = \frac{2\operatorname{tang}\alpha\, r\, dr}{\sqrt{-1 + 2\frac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}r^2 - r^4}}.$$

Ce qui donne lieu, pour la cyclogénide extérieure, d'ordre $\frac{1}{n}$, aux équations suivantes :

$$r'^{2n} - 2r'^{n}\frac{\cos n\theta'}{\cos\alpha} + 1 = 0,$$

$$ds' = \frac{1}{n}\frac{\sin\alpha}{(\cos\alpha)^{\frac{1}{n}}}(1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi)^{\frac{1-n}{2n}}$$

$$= 2\operatorname{tang}\alpha\frac{r'^{n}\,dr'}{\sqrt{-1 + 2\frac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}r'^{2n} - r'^{4n}}}$$

$$= 2\operatorname{tang}\alpha\frac{dr'}{\sqrt{2\frac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} - (r'^{2n} + r'^{-2n})}}.$$

30. Ces dernières formules sont, comme on voit, tout à fait semblables aux précédentes, et, par suite, l'arc des cyclogénides intérieures ou extérieures de même ordre exprime toujours une même fonction transcendante, qui ne dépend des fonctions circulaires que dans le cas où l'ordre de la cyclogénide est un nombre entier impair quelconque. Nous appellerons l'angle α, qui, dans les deux cas considérés, a une signification différente, le *paramètre angulaire* de la cyclogénide.

On peut remarquer que deux cyclogénides de nature différente, de même ordre et de même paramètre, rapportées au même pôle et au

même axe, se coupent orthogonalement en des points dont les distances au pôle sont deux à deux inverses l'une de l'autre. De plus, ces mêmes points sont sur des rayons symétriquement placés dans l'arc correspondant, sur chaque cyclogénide, au demi-cercle primitif déterminé soit par l'axe ou par le diamètre perpendiculaire.

On obtient ainsi une infinité de systèmes de courbes orthogonales et isothermes qui fournissent, ou par eux-mêmes, ou par une transformation facile, tous ceux qu'on a étudiés jusqu'ici. Ainsi le système orthogonal des cyclogénides du second ordre, transformé par des rayons réciproques menés d'un même point convenablement choisi, donne le système bien connu des courbes confocales du second degré. Nous pourrons revenir ailleurs sur ces divers points, que nous nous contentons d'indiquer en passant.

31. Mentionnons, en terminant ce Chapitre, une formule remarquable exprimant la différence ou la somme des arcs d'une même cyclogénide, qui ont une même extrémité fixe, et dont les deux autres sont assujetties à être à des distances du pôle inverses l'une de l'autre.

On trouve, pour la différentielle de cet arc σ,

$$d\sigma = 2\sqrt{2}\,(\text{séc}\,\alpha \text{ ou } \text{tang}\,\alpha)\frac{d\left(\frac{r'\pm r'^{-1}}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}-\left(\frac{r'^{2n}+r'^{-2n}}{2}\right)}},$$

en prenant pour facteur, dans la première parenthèse, séc α ou tang α, selon que la cyclogénide est intérieure ou extérieure.

L'ambiguïté du signe, dans la seconde parenthèse, correspond aux deux cas différents où il s'agit de la somme ou de la différence des arcs considérés.

Les fonctions

$$\frac{r'\pm r'^{-1}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{r'^{2n}+r'^{-2n}}{2}$$

ne sont autre chose que des sinus ou des cosinus hyperboliques. Or il existe entre ces fonctions une relation algébrique, lorsqu'on donne à n une valeur commensurable quelconque. L'arc σ est donc l'intégrale d'une différentielle algébrique dans laquelle on peut prendre

pour variable

$$\frac{r' + r'^{-1}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{r' - r'^{-1}}{2},$$

et, dans certains cas, cette intégrale est susceptible d'avoir une valeur beaucoup plus simple que celle qui exprime la valeur de l'arc indéfini de la même courbe.

M. William Roberts a donné autrefois la forme sous laquelle se présente l'intégrale, dans le cas où n est un nombre entier positif (¹), et a ainsi généralisé un théorème de M. J.-A. Serret relatif à la cyclogénide d'ordre $\frac{1}{2}$ (²). Le calcul précédent permet de donner encore plus d'extension aux résultats trouvés par ces deux géomètres.

CHAPITRE VI.

DE QUELQUES THÉORÈMES DE CALCUL INTÉGRAL AUXQUELS CONDUIT LA COMPARAISON DES ARCS DE CYCLOGÉNIDE.

32. Nous venons de retrouver, comme arc de cyclogénide, la transcendante

$$\int (1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi)^p \, d\varphi,$$

que nous avons prise, au Chapitre II, pour base de notre solution analytique du problème de la rectification inverse. Cette quadrature est équivalente, à un facteur constant près, à

$$\int (1 - c^2 \sin^2 u)^p \, du.$$

Il suffit, pour passer de la première à la seconde, de poser, en effet,

$$u = \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{2\sqrt{\sin\alpha}}{1 + \sin\alpha};$$

(¹) *Journal de Liouville*, t. XIII, p. 38.

(²) *Journal de Liouville*, t. VIII, p. 145; t. IX, p. 160, et *Calcul intégral* de M. J.-A. Serret, p. 263.

et comme, dans les hypothèses faites précédemment, $\sin\alpha$ est essentiellement positif, on voit que c est réel et plus petit que l'unité.

La correspondance entre deux points de cyclogénide situés à des distances inverses du pôle est donnée par l'équation

$$b \operatorname{tang} u \operatorname{tang} v = 0,$$

en désignant par v une nouvelle valeur de la variable u, et par b une constante liée à c par la relation

$$b = \sqrt{1 - c^2}.$$

33. Cette substitution donne lieu aux équations suivantes :

$$\cos u = \frac{b \sin v}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 v}}, \quad \sin u = \frac{\cos v}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 v}},$$

$$1 - c^2 \sin^2 u = \frac{b^2}{1 - c^2 \sin^2 v}, \qquad du = -\frac{b\, dv}{1 - c^2 \sin^2 v},$$

d'où l'on déduit, en représentant par m un nombre commensurable quelconque,

$$b^{-m}(1 - c^2 \sin^2 u)^{m - \frac{1}{2}} du = - b^m (1 - c^2 \sin^2 v)^{-m - \frac{1}{2}} dv,$$

et, par suite, en intégrant et en tenant compte des valeurs aux limites,

$$b^{-m} \int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m - \frac{1}{2}} du = + b^m \int_v^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 v)^{-m - \frac{1}{2}} dv$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned} & b^{-m} \int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m - \frac{1}{2}} du + b^m \int_0^v (1 - c^2 \sin^2 v)^{-m - \frac{1}{2}} dv \\ &= b^{-m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 u)^{m - \frac{1}{2}} du \\ &= b^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 v)^{-m - \frac{1}{2}} dv. \end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale

$$\int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m-\frac{1}{2}} du$$

est susceptible d'être transformée au signe, à un facteur et à une constante près, en la même intégrale, dans laquelle m est pris avec un signe contraire.

34. En appliquant ce théorème aux trois transcendantes

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)^3}}, \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{(1-c^2\sin^2\varphi)^3}} \quad \text{et} \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt[3]{(1-c^2\sin^2\varphi)^2}},$$

on peut, d'après cela, les ramener à ces formes simples, plus connues,

$$\int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}, \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{1-c^2\sin^2\varphi}} \quad \text{et} \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt[3]{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

dont la première est l'arc d'ellipse ou la fonction elliptique de seconde espèce, et dont les deux autres ont été étudiées spécialement par Legendre, dans son *Traité des Fonctions elliptiques* [1].

35. La même substitution peut encore servir à généraliser un théorème de Fagnano relatif aux arcs d'ellipse.

Posons pour cela

$$bx = 1 - c^2 \sin^2 u \quad \text{et} \quad by = 1 - c^2 \sin^2 v,$$

les variables u et v étant toujours liées par l'équation précédente

$$b \operatorname{tang} u \operatorname{tang} v = 1.$$

Il s'ensuit, par un calcul facile,

$$xy = 1, \quad c \sin u = \sqrt{1 - bx}, \quad c \cos u = \sqrt{b}\sqrt{x - b},$$

$$du = -\frac{b\,dx}{2c^2 \sin u \cos u} = -\frac{\sqrt{b}\,dx}{2\sqrt{x(1-b^2) - b(1+x^2)}}$$

[1] T. Ier, p. 178 et 180.

et, par suite,

$$\int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m-\frac{1}{2}} du = -\frac{b^m}{2m} \int_{\frac{1}{b}}^{x} \frac{d(x^m)}{\sqrt{1 + b^2 - b(x + x^{-1})}},$$

$$\int_v^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 v)^{m-\frac{1}{2}} dv = +\frac{b^m}{2m} \int_{\frac{1}{b}}^{x} \frac{d(x^{-m})}{\sqrt{1 + b^2 - b(x + x^{-1})}},$$

d'où résulte

$$\int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m-\frac{1}{2}} du - \int_v^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 v)^{m-\frac{1}{2}} dv = -\frac{b^m}{2m} \int_{\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)}^{z} \frac{d\varphi_m(z)}{\sqrt{1 - b^2 - 2bz}}$$

et

$$\int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m-\frac{1}{2}} du + \int_v^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 v)^{m-\frac{1}{2}} dv = -\frac{b^m}{2m} \int_{\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)}^{z} \frac{d\psi_m(z)}{\sqrt{1 - b^2 - 2bz}},$$

en posant

$$\frac{x + x^{-1}}{2} = z, \qquad \frac{x^m + x^{-m}}{2} = \varphi_m z \quad \text{et} \quad \frac{x^m - x^{-m}}{2} = \psi_m z,$$

$\varphi_m z$ et $\psi_m z$ désignant un sinus et un cosinus hyperboliques qui s'expriment par une fonction algébrique de z pour toute valeur commensurable donnée à m.

36. Si m est un nombre entier, φ_m est un polynôme entier en z du degré m; dans ce cas, la différence des transcendantes précédentes est algébrique, et la différence des arcs qui y correspondent est rectifiable.

Si l'on fait, par exemple, $m = 1$, on obtient, après quelques réductions faciles,

$$\int_0^u du \sqrt{1 - c^2 \sin^2 u} - \int_v^{\frac{\pi}{2}} dv \sqrt{1 - c^2 \sin^2 v} = c^2 \sin u \sin v.$$

C'est dans cette relation que consiste le théorème de Fagnano, sous la forme que lui a donnée Legendre [1].

---

[1] LEGENDRE, *Traité des Fonctions elliptiques*, t. Ier, p. 45.

37. D'après ce qu'on vient de voir, ce théorème s'étend aux cyclogénides d'ordre entier pair quelconque, qui fournissent ainsi, d'une infinité de manières, des arcs dont la différence est rectifiable, bien que l'arc indéfini de ces courbes ne soit exprimable que par les fonctions elliptiques.

La même analyse, qui ne diffère pas essentiellement de celle du n° 31, montrerait encore, en faisant m égal à un nombre fractionnaire ayant pour dénominateur 3 ou 4, que la différence des transcendantes devient alors exprimable par les fonctions elliptiques; mais nous ne croyons pas devoir nous arrêter plus longtemps sur ces théorèmes et d'autres analogues qui nous éloigneraient trop de notre sujet.

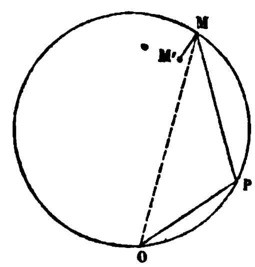
CHAPITRE VII.

D'UN THÉORÈME DE M. J.-A. SERRET SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA FONCTION ELLIPTIQUE DE PREMIÈRE ESPÈCE ET D'UNE CONSÉQUENCE CURIEUSE QUI EN RÉSULTE.

38. Les recherches qui sont exposées dans ce Mémoire ont eu pour point de départ l'examen d'un théorème découvert par M. J.-A. Serret (¹), et dont voici l'énoncé, que j'emprunte au récent *Cours de Calcul différentiel et intégral* publié par cet auteur (²).

Théorème. — « Si un triangle OMP varie dans son plan de manière

Fig. 1.



que le sommet O reste fixe, et que les côtés constants OP et PM soient

(¹) *Journal de Liouville*, t. X et XI, *Mémoires des Savants étrangers*, t. XIII, *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. Iᵉʳ, p. 186, etc.

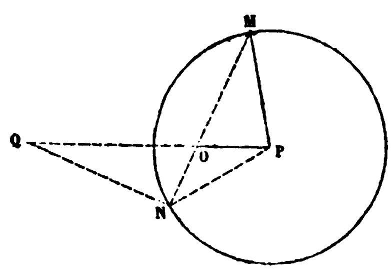
(²) Paris, 1868, Gauthier-Villars; t. II, p. 269.

proportionnels, le premier à $\sqrt{n}$ et le second à $\sqrt{n+1}$; si, de plus, le déplacement infiniment petit MM′ du point M a lieu à chaque instant suivant le rayon du cercle circonscrit au triangle OMP, le point M engendrera une courbe (algébrique pour les valeurs commensurables de n) dont l'arc indéfini sera égal au produit de OP par la fonction elliptique de première espèce, en prenant pour module le rapport $\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PM}}$ et pour amplitude l'angle MOP. »

39. Je me suis assuré, ainsi qu'il suit, que la courbe définie par le théorème précédent est l'inverse d'une épicycloïde plane particulière dont le centre du cercle fixe serait en O.

Du point P comme centre, et avec PM pour rayon, je décris, pour

Fig. 2.



cela, un cercle qui coupe en N le prolongement de OM. On aura

$$\mathrm{OM} \times \mathrm{ON} = \overline{\mathrm{PM}}^2 - \overline{\mathrm{OP}}^2 = 1,$$

en supposant, conformément au théorème,

$$\mathrm{OP} = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \mathrm{PM} = \sqrt{n+1}.$$

Soit maintenant pris, sur le prolongement de PO, le point Q, à une distance OQ du point O inverse de OP, ou

$$\mathrm{OQ} = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

la droite NQ sera la transformée inverse de la circonférence circonscrite au triangle OPM, qui est normale au lieu décrit par le point M :

donc NQ est normale à la courbe inverse décrite par le point N, conjugué du point M.

Imaginons deux cercles, l'un fixe ayant son centre en O et OQ pour rayon; le second mobile, auquel le point N est invariablement lié, et ayant PQ pour rayon et P pour centre. Ce second cercle fera décrire au point N une épicycloïde dont la normale en N serait NQ. Cette courbe est donc précisément l'inverse de celle qui est définie par le théorème précédent.

D'après les conditions de l'énoncé, la distance NP = MP du point de l'épicycloïde au centre du cercle mobile doit être moyenne proportionnelle entre la distance des centres OP des deux cercles et le rayon PQ du cercle mobile.

40. On aurait pu arriver au même résultat en partant des équations données par M. J. Liouville ([1]), à la suite de son rapport sur le premier Mémoire de M. J.-A. Serret relatif à la représentation des fonctions elliptiques. En appelant x et y les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque des courbes précédentes, n un nombre commensurable et φ un angle variable auxiliaire, M. J. Liouville a obtenu les équations suivantes :

$$x = \frac{\cos 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\cos(2n+1)\varphi}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi}.$$

$$y = \frac{\sin 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\sin(2n+1)\varphi}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi},$$

d'où il a déduit, pour l'expression du rayon vecteur $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et de la différentielle de l'arc s,

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi}},$$

$$ds = 2\sqrt{n(n+1)}\, r\, d\varphi.$$

En transformant la courbe considérée par des rayons inverses menés de l'origine, il vient, pour les coordonnées x_1, y_1 de la nouvelle

([1]) *Journal de Liouville*, t. X, p. 295.

courbe,

$$x_1 = \cos 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\cos(2n+1)\varphi,$$

$$y_1 = \sin 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\sin(2n+1)\varphi;$$

posant ensuite

$$\tang\alpha = \sqrt{n}, \quad \beta = (n+1)\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

et faisant tourner les axes coordonnés de l'angle β, ces dernières équations se simplifient encore et deviennent

$$x\cos\alpha = \cos n\varphi + \sin\alpha\cos(n+1)\varphi,$$

$$y\cos\alpha = \sin n\varphi + \sin\alpha\sin(n+1)\varphi,$$

qui sont, sous une forme bien connue, les valeurs des coordonnées de l'épicycloïde particulière dont il vient d'être question.

CHAPITRE VIII.

EXPRESSION DE L'ARC DES ÉPICYCLOÏDES OU HYPOCYCLOÏDES PLANES ET DES COURBES QUI EN SONT DÉRIVÉES PAR LA MÉTHODE EXPONENTIELLE.

41. La remarque précédente nous conduit naturellement à chercher la rectification des courbes épicycloïdes transformées par la méthode exponentielle, qui comprend, comme cas très-particulier, leurs inverses.

Supposons qu'un cercle mobile quelconque roule sur un autre cercle fixe, en lui présentant au contact la même convexité; un point lié invariablement au premier cercle décrira, dans ce mouvement, une courbe épicycloïde dont les coordonnées x et y seront représentées par les équations

$$x = m\cos\varphi + a\cos m\varphi,$$

$$y = m\sin\varphi + a\sin m\varphi,$$

dans lesquelles l'angle variable φ désigne l'angle que fait la ligne des

centres des cercles avec l'axe des x; a la distance du centre du cercle mobile au point qui décrit la courbe (en prenant pour unité de longueur le rayon de ce cercle); enfin m la distance des centres des deux cercles, qui est positive ou négative, selon que le cercle mobile est plus grand ou plus petit que le cercle fixe.

Dans le premier cas, où $m > 0$, la courbe est une épicycloïde proprement dite; dans le second, au contraire, où l'on a $m < 0$, la courbe est une *épicycloïde intérieure* ou une *hypocycloïde*. Ces deux familles distinctes sont séparées, pour le cas limite de $m = 0$, par le système formé d'une infinité de cercles concentriques.

Il est visible que le nombre m sera toujours plus petit que l'unité, en valeur absolue, dans l'hypothèse où nous nous plaçons. Nous appellerons ce nombre m l'*ordre* de l'épicycloïde, et *module* le second rapport a, que nous supposerons essentiellement positif.

42. L'expression différentielle de l'arc peut être mise sous la forme

$$ds = \frac{m\,d\psi}{1-m}\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\psi},$$

en posant

$$\psi = (1-m)\varphi.$$

Ce nouvel angle variable ψ n'est autre que celui que fait le rayon mobile avec la ligne des centres des deux cercles. Il en résulte que la spire complète d'épicycloïde, correspondant à une révolution complète du cercle mobile, ou à la variation de ψ depuis 0 jusqu'à 2π, est équivalente au demi-périmètre d'une ellipse dont les axes sont entre eux dans le rapport de

$$1 - a \quad \text{à} \quad 1 + a,$$

et que les arcs indéfinis de ces deux courbes se correspondent mutuellement, ce qui est une proposition très-connue.

43. Il vient maintenant, en prenant pour pôle l'origine, par l'application à l'épicycloïde de la transformation exponentielle du $m^{\text{ième}}$ ordre (n° 25),

$$ds' = nr^{n-1}\,ds = \frac{nm}{1-m}(a^2 + m^2 + 2am\cos\psi)^{\frac{n-1}{2}}(1 + a^2 + 2a\cos\psi)^{\frac{1}{2}}\,d\psi,$$

et en observant que le rayon vecteur r est donné par la formule

$$r = (a^2 + m^2 + 2am\cos\psi)^{\frac{1}{2}}.$$

L'expression de l'arc se simplifie beaucoup dans trois cas principaux que nous allons examiner successivement.

44. Le cas de $a = 1$ correspond aux épicycloïdes ordinaires, qui sont décrites par un point même de la circonférence du cercle mobile. On obtient, dans cette première hypothèse,

$$ds' = \frac{4nm}{1-m}(1 + m^2 + 2m\cos\psi)^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{\psi}{2}\,\frac{d\psi}{2};$$

si l'on pose ensuite

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{1+m}{2\sqrt{m}}\sin\theta \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\psi}{2} = \frac{1+m}{2\sqrt{-m}}\tang\theta,$$

suivant que m est positif ou négatif, on retrouve pour l'arc s' ces expressions semblables à celles du n° 15, savoir :

$$2n\sqrt{m}\,\frac{(1+m)^n}{1-m}\int \cos\theta^n\,d\theta \quad \text{ou} \quad 2n\sqrt{-m}\,\frac{(1+m)^n}{1-m}\int \frac{d\theta}{\cos\theta^{n+1}},$$

ce qui est une représentation de l'arc des orthogénides par une infinité de courbes algébriques différentes ([1]).

45. Lorsque $n = -1$, l'arc s' se présente sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\frac{2\sqrt{m}}{1-m^2}\int \frac{d\theta}{\cos\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{2\sqrt{-m}}{1-m^2}\int d\theta.$$

Cet arc exprime donc, pour des valeurs positives de m, une fonction logarithmique des coordonnées de l'extrémité variable ([2]), et devient identique à un arc de cercle pour les valeurs négatives de m. Ainsi, on le voit, les inverses des épicycloïdes et des hypocycloïdes donnent une

---

([1]) Cette solution n'est autre que celle qui résulte de l'analyse directe du n° 15.
([2]) *Voir* la Note (1) du n° 7, p. 154.

solution simple des deux problèmes jugés autrefois impossibles par Euler, et dont nous avons parlé (n° 7, Chap. II).

46. Nous supposerons maintenant, en second lieu, dans la formule du n° 43,

$$a = \pm m,$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que la courbe est une épicycloïde ou une hypocycloïde. Dans l'un et l'autre cas, le pôle est nécessairement un point multiple de la courbe, qui reste tel dans les dérivées d'ordre positif, tandis qu'il donne naissance à des branches infinies dans les dérivées d'ordre négatif. Cette propriété suffit d'ailleurs pour caractériser nettement le cas actuel.

L'arc devient alors

$$s' = \frac{n.2^n.a^n}{1-a}\int (1 + a^2 + 2a\cos\psi)^{\frac{1}{2}} \cos^{n-1}\frac{\psi}{2}\,\frac{d\psi}{2},$$

ou

$$s' = \frac{n.2^n.a^n}{1+a}\int (1 + a^2 + 2a\cos\psi)^{\frac{1}{2}} \sin^{n-1}\frac{\psi}{2}\,\frac{d\psi}{2},$$

selon que m est positif ou négatif (¹). Ces intégrales donnent surtout un résultat simple pour les valeurs particulières $n = -2$ et $n = -1$, comme nous le verrons dans les deux Chapitres suivants.

47. Le dernier cas de la formule du n° 43, que nous voulons considérer, revient à supposer

$$a = \sqrt{m},$$

et, par suite, m essentiellement positif. L'épicycloïde est alors décrite par un point situé à une distance du centre du cercle mobile, moyenne proportionnelle entre la distance des centres et le rayon du cercle mobile.

Posons, dans cette hypothèse,

$$m = \sin^2\alpha;$$

(¹) Formules analogues à celles du n° 43.

les formules qui donnent r et ds (n^{os} 43 et 42) deviennent respectivement

$$r = \sin\alpha\,(1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\psi)^{\frac{1}{2}},$$

$$ds = \tang^2\alpha(1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\psi)^{\frac{1}{2}}\,d\psi,$$

et l'on aura, par la transformation exponentielle du $n^{ième}$ ordre (n° 43),

$$ds' = \frac{n\sin\alpha^{n+1}}{\cos^2\alpha}(1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\psi)^{\frac{n}{2}}\,d\psi:$$

l'arc s' est donc identique à l'arc de la cyclogénide d'ordre $\pm n'$, en faisant (n^{os} 28 et 29),

$$n = \pm n' - 1.$$

48. Pour $n = -2$, il vient $n' = \pm 1$; la rectification de la courbe est identique à celle du cercle; pour $n = -1$, la rectification donne la fonction elliptique de première espèce. Les courbes correspondant à ces deux cas particuliers ont été considérées, pour la première fois, par Euler et J.-A. Serret. Elles ont entre elles et les épicycloïdes, comme on voit, une relation simple, sur laquelle nous reviendrons encore dans les Chapitres suivants.

CHAPITRE IX.

DE LA RECTIFICATION DES ÉPICYCLOÏDES DÉRIVÉES DU SECOND ORDRE NÉGATIF, — COURBES QU'EULER A TROUVÉES PAR L'ANALYSE DANS SES DERNIERS MÉMOIRES.

49. La transformation exponentielle des épicycloïdes mérite d'être examinée en détail pour le premier et le second ordre négatif : c'est ce que nous ferons dans ce Chapitre et le suivant, en commençant par le second ordre qui conduit à des résultats connus.

La différentielle ds' de l'arc de l'épicycloïde la plus générale devient dans ce cas (n° 43)

$$ds' = \frac{2m}{1-m}\,d\psi\sqrt{\frac{1 + a^2 + 2a\cos\psi}{(a^2 + m^2 + 2am\cos\psi)^2}},$$

expression susceptible d'être ramenée à une forme plus simple par un changement de variable.

50. En posant, en effet,

$$\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} = \frac{a+m}{a-m}\operatorname{tang}u,$$

et en écartant pour le moment le cas de $a = \pm m$, que nous traiterons plus loin, cette substitution donnera successivement

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{(a+m)\sin u}{\sqrt{(a-m)^2 + 4am\sin^2 u}},$$

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{(a-m)\cos u}{\sqrt{(a-m)^2 + 4am\sin^2 u}},$$

$$d\psi = 2\,\frac{(a^2 - m^2)\,du}{(a-m)^2 + 4am\sin^2 u},$$

$$1 + a^2 + 2a\cos\psi = \frac{(1-a)^2(a+m)^2\sin^2 u + (1+a)^2(a-m)^2\cos^2 u}{(a-m)^2 + 4am\sin^2 u},$$

$$m^2 + a^2 + 2am\cos\psi = \frac{(a^2-m^2)^2}{(a-m)^2 + 4am\sin^2 u},$$

et, par suite,

$$ds' = \frac{4m\,du}{(1-m)(a^2-m^2)^2}\sqrt{(1-a)^2(a+m)^2\sin^2 u + (1+a)^2(a-m)^2\cos^2 u}.$$

51. Cette dernière expression montre que la rectification de notre courbe épicycloïde est identique à celle d'une ellipse dans laquelle les axes seraient entre eux, abstraction faite du signe, dans le rapport de

$$(1-a)(a+m) \quad \text{à} \quad (1+a)(a-m).$$

Nous avons maintenant à examiner le cas particulier de $a = 1$ et $a = \pm m$, qui mettent ce théorème en défaut.

52. Le cas de $a = 1$ n'offre aucune difficulté : la courbe devient absolument rectifiable, et la formule précédente donne immédiatement

$$s' = \frac{8m\sin u}{(1-m^2)^2},$$

l'angle u étant lié à l'angle ψ de l'épicycloïde par la relation

$$\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} = \frac{1+m}{1-m}\operatorname{tang}u.$$

53. Reprenons la formule du n° 49, qui donne pour différentielle de l'arc

$$ds' = \frac{2m}{1-m} d\psi \sqrt{\frac{1+a^2+2a\cos\psi}{(a^2+m^2+2am\cos\psi)^3}};$$

elle devient dans le second cas de $a = \pm m$, en distinguant les deux signes,

$$ds' = \frac{1}{2(1-a)a^2}\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi}\,\frac{\frac{d\psi}{2}}{\cos^3\frac{\psi}{2}},$$

ou

$$ds' = \frac{1}{2(1+a)a^2}\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi}\,\frac{\frac{d\psi}{2}}{\sin^3\frac{\psi}{2}},$$

suivant que m sera positif ou négatif. Si l'on pose, dans le premier cas,

$$\tang\frac{\psi}{2} = \frac{1+a}{1-a}\tang\theta,$$

et dans le second, au contraire,

$$\tang\frac{\psi}{2} = \frac{1-a}{1+a}\tang\theta,$$

il viendra

$$s' = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta},$$

ou

$$s' = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta}.$$

Ainsi, dans l'un et l'autre cas, l'arc de la courbe équivaut, à un facteur numérique près, à un arc de parabole qui a pour valeur, comme on a vu (n° 18), l'intégrale

$$\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta}.$$

54. L'excentricité de l'ellipse qui mesure, dans le cas général, l'arc indéfini de la courbe, devient nulle en faisant

$$m = a^2;$$

il vient alors

$$\tang \frac{\psi}{2} = \frac{1+a}{1-a} \tang u,$$

et, pour valeur de l'arc s',

$$s' = \frac{4u}{a(1-a^2)^2},$$

qui est identique à un arc de cercle, ce qui est conforme à la remarque que nous avons déjà faite au n° 48.

55. Euler a obtenu les courbes générales précédentes dans le Mémoire posthume intitulé : *De binis curvis algebricis eadem rectificatione gaudentibus* (¹). Il a reconnu que la courbe est algébrique lorsque le rapport des axes de l'ellipse qui lui correspond est commensurable; ce qui revient à supposer dans les formules précédentes a et m commensurables en même temps; mais on peut prendre a incommensurable et m commensurable, et ce rapport devient alors incommensurable sans que la courbe cesse d'être algébrique. Notre résultat est donc un peu plus général que celui d'Euler. Le même géomètre a consacré un Mémoire spécial, imprimé à la suite du précédent, à l'examen du cas où l'ellipse devient un cercle (²). Quant aux courbes paraboliques qui appartiennent au même mode de génération, Euler les a également mentionnées dans différents Mémoires, ainsi que nous l'avons dit (n° 19); mais l'illustre géomètre ne paraît pas avoir remarqué la nature épicycloïdale de toutes ces courbes, mise en évidence dans ce Chapitre.

CHAPITRE X.

REPRÉSENTATION EXACTE DE LA FONCTION ELLIPTIQUE DE TROISIÈME ESPÈCE PAR LES ARCS DES ÉPICYCLOÏDES INVERSES. — CAS PARTICULIERS REMARQUABLES.

56. Les inverses de trois espèces particulières d'épicycloïdes donnent, comme nous l'avons vu (nᵒˢ 45, 46 et 48), par leur rectification,

---

(¹) *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, t. XI, p. 107 et suivantes.
(²) *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, p. 114.

quelques transcendantes fort simples. Nous allons faire voir que l'arc indéfini de l'inverse de l'épicycloïde la plus générale est précisément égal à la fonction elliptique de troisième espèce, dans laquelle le paramètre et le module sont laissés complétement arbitraires.

Pour le cas de $n = -1$, la formule du n° 43 donne

$$ds' = \frac{m\,d\psi}{1-m}\,\frac{\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi}}{a^2+m^2+2am\cos\psi}.$$

57. Posons, en effectuant un changement de variable,

$$\cot\frac{\psi}{2} = \frac{1-a}{1+a}\tang u;$$

on obtiendra les relations suivantes :

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{(1-a)\sin u}{\sqrt{(1+a)^2-4a\sin^2 u}},$$

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{(1+a)\cos u}{\sqrt{(1+a)^2-4a\sin^2 u}},$$

$$d\psi = -\frac{2(1-a^2)\,du}{(1+a)^2-4a\sin^2 u},$$

$$m^2+a^2+2am\cos\psi = \frac{(a-m)^2(1+a)^2-4a(1-m)(a^2-m)\sin^2 u}{(1+a)^2-4a\sin^2 u},$$

$$\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi} = \frac{1-a^2}{\sqrt{(1+a)^2-4a\sin^2 u}};$$

d'où l'on déduit enfin, en écartant le cas de $a = 1$,

$$ds = \frac{2m}{1-m}\,\frac{(1-a)^2}{1+a}\,\frac{1}{(a-m)^2+\dfrac{4a(m-1)(a^2-m)}{(1+a)^2}\sin^2 u}\,\frac{du}{\sqrt{1-\dfrac{4a}{(1+a)^2}\sin^2 u}},$$

dernière formule qui démontre notre théorème.

58. Il viendra donc, en employant la notation connue de Legendre,

$$s' = \frac{2m}{1-m}\,\frac{(1-a)^2}{(1+a)(a-m)^2}\,\Pi\left[\frac{4a(m-1)(a^2-m)}{(a-m)^2(1+a)^2},\ \frac{2\sqrt{a}}{1+a},\ u\right],$$

et si l'on se donne le paramètre n, et le module c de la fonction elliptique de troisième espèce, l'ordre et le module de l'épicycloïde inverse correspondante seront aussi donnés. Le module a dépendra uniquement de c par la relation

$$c = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}.$$

Quant à l'ordre m, on l'obtiendra par la résolution de l'équation du second degré

$$4a(m-1)(a^2-m) = n(a-m)^2(1+a)^2,$$

susceptible d'être mise sous cette forme plus simple

$$\frac{m+a}{m-a} = \pm\frac{1+a}{1-a}\sqrt{n+1}.$$

On voit qu'on pourra toujours déterminer deux valeurs différentes réelles de m, pourvu qu'on ne donne pas à n de valeur négative plus grande que l'unité en valeur absolue, ou, ce qui revient au même, pourvu qu'on ne prenne pas le paramètre de la fonction elliptique de troisième espèce hors des limites exigées par la théorie même de cette fonction [1].

Dans le cas où a et $\sqrt{1+n}$ seraient à la fois deux quantités commensurables, la courbe considérée serait alors algébrique. La fonction elliptique de troisième espèce est donc susceptible d'être représentée, dans une infinité de cas, par l'arc indéfini d'une pareille courbe.

59. La fonction complète

$$\Pi^1(n, c),$$

qui correspond à l'intégrale précédente, entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$ données à u, sera évidemment égale à l'intégrale comprise entre les valeurs o et π, attribuées, comme limites, à l'angle ψ. Ainsi cette fonction Π^1 est exactement représentée par l'arc inverse de celui qui est engendré par une demi-révolution du cercle mobile de l'épicycloïde. Nous allons maintenant passer en revue quelques cas remarquables.

---

(1) LEGENDRE, *Traité des Fonctions elliptiques*, t. Ier, n° 53, p. 71.

60. On sait que la fonction

$$\Pi(-1,\ c,\ u)$$

exprime, à un facteur constant près, l'arc d'une hyperbole (¹). Or la valeur $n = -1$ du paramètre est obtenue en faisant ici

$$m = -a.$$

Ainsi l'arc inverse de toute hypocycloïde, à branches infinies (²), est équivalent à l'arc de l'hyperbole définie par les équations

$$x = \frac{c}{\cos\varphi}\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}, \quad y = b^2\operatorname{tang}\varphi,$$

où φ désigne un angle auxiliaire variable, et où l'on pose, en outre,

$$c = \frac{2\sqrt{a}}{1+a} \quad \text{et} \quad b = \frac{1-a}{1+a}.$$

L'arc s' de la première courbe est alors lié à l'arc Ψ de la seconde par cette équation (³)

$$s' = \frac{\Psi}{2a} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 \Pi\left(-1,\ \frac{2\sqrt{a}}{1+a},\ \varphi\right).$$

Il est facile de s'assurer que la racine carrée du module a n'est autre ici que la tangente trigonométrique de la moitié de l'angle que fait l'asymptote avec l'axe non transverse de l'hyperbole précédente.

61. Nous ne nous arrêterons pas à examiner le cas particulier où $n = \pm c$, où l'on aurait entre a et m cette condition

$$\frac{m-a}{m+a} = \frac{1 \pm \sqrt{a}}{\sqrt{1+a}}.$$

L'arc de l'épicycloïde inverse serait alors égal à la somme d'une fonction elliptique de première espèce et d'un arc de cercle qu'on

---

(¹) LEGENDRE, *Traité des Fonctions elliptiques*, t. Iᵉʳ, p. 70.
(²) *Voir* l'observation faite au n° 46.
(³) LEGENDRE, *Traité des Fonctions elliptiques*, t. Iᵉʳ, p. 16 et 70.

pourrait construire algébriquement pour toute valeur commensurable de $\sqrt{a}$ (¹). Nous avons hâte d'arriver à d'autres cas beaucoup plus simples.

62. Pour $n=0$ ou $m=a^2$, l'arc équivaut exactement à une fonction elliptique de première espèce dont le module est

$$\frac{2\sqrt{a}}{1+a}.$$

La fonction complète de première espèce correspond encore à l'arc inverse d'une demi-spire, de même que la fonction complète de seconde espèce, pour le même module, est égale à l'arc direct de cette demi-spire d'épicycloïde. Toutefois, l'arc indéfini inverse est susceptible de prendre une autre forme, en posant

$$\tang\theta = \frac{\sin\psi}{a+\cos\psi},$$

ce qui donne, pour différentielle de l'arc en fonction de ψ,

$$ds' = \frac{1}{1-a^2}\frac{d\psi}{\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi}} = \frac{2}{1-a^2}\frac{1}{1+a}\frac{\frac{d\psi}{2}}{\sqrt{1-\frac{4a}{(1+a)^2}\sin^2\frac{\psi}{2}}},$$

et en fonction de θ

$$ds' = \frac{1}{1-a^2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}}.$$

La nouvelle amplitude θ n'est d'ailleurs autre chose que l'angle que fait le rayon vecteur de la courbe avec la ligne des centres, et le module de la fonction elliptique de première espèce devient alors égal au module même de l'épicycloïde (²).

63. La longueur de la demi-spire de notre courbe épicycloïde inverse correspond à la fonction complète quand on prend pour amplitude $\frac{\psi}{2}$, et au *double* de la fonction complète du module a quand on

(¹) LEGENDRE, *Traité des Fonctions elliptiques*, t. Iᵉʳ, p. 69.
(²) *Voir* ci-dessus les nᵒˢ 38 et 39.

prend pour amplitude θ. En appelant S la longueur de cet arc, on aura de plus, suivant la notation de Legendre,

$$S = \frac{2}{1-a^2}\frac{1}{1+a}F^1\left(\frac{2\sqrt{a}}{1+a}\right),$$

et, dans le second cas,

$$S = \frac{2}{1-a^2}F^1(a);$$

d'où résulte cette identité connue (¹)

$$(1+a)F^1(a) = F^1\left(\frac{2\sqrt{a}}{1+a}\right),$$

dont on obtient ainsi une interprétation géométrique intéressante.

64. Il nous reste à examiner un dernier cas qui répond à l'hypothèse

$$a = 1,$$

et où la première substitution employée au n° 57 est en défaut. Ce cas a déjà été examiné sommairement aux n^{os} 22, 23 et 45 de ce Mémoire. La courbe est alors l'inverse d'une épicycloïde ou d'une hypocycloïde ordinaire. La rectification de l'arc est donnée dans le premier cas par la formule

$$\frac{1-m^2}{\sqrt{m}}s' = L\left(\frac{1+m+2\sqrt{m}\sin\frac{\psi}{2}}{1+m-2\sqrt{m}\sin\frac{\psi}{2}}\right),$$

où l'arc s' est compté à partir du point milieu d'une spire entière, et où l'angle ψ varie depuis 0 jusqu'à $\pm\pi$. Au delà, la formule ne saurait convenir. De même, dans le second cas, l'arc inverse des hypocycloïdes satisfait à l'équation

$$\operatorname{tang}\left(\frac{1-m^2}{2\sqrt{-m}}\right)s' = \frac{2\sqrt{-m}}{1+m}\sin\frac{\psi}{2},$$

(¹) *Fonctions elliptiques*, t. I^{er}, p. 81.

qui convient, pour toute valeur négative de m, à la longueur d'une spire entière, en faisant varier ψ depuis $-\pi$ jusqu'à $+\pi$.

65. Le défaut que nous venons de signaler pour les deux dernières classes de courbes tient à l'existence des points de rebroussement par lesquels deux spires consécutives se soudent l'une à l'autre. Cette circonstance ne se présente pas dans les autres épicycloïdes où le point décrivant la courbe n'est pas situé sur la circonférence du cercle mobile. Les spires se succèdent l'une à l'autre sans changement brusque dans la direction de l'arc. Par un changement convenable de la constante, en chaque point de rebroussement, on pourrait toutefois suivre encore la marche de l'arc indéfini, en passant d'une spire à l'autre. Il était bon d'avertir de cette restriction à apporter aux formules précédentes, et ce que nous venons de dire suffit pour prévenir toute difficulté, dans l'emploi des formules générales.

66. Les résultats que nous venons d'exposer dans ce Chapitre sont susceptibles d'une grande extension, lorsqu'on prend le pôle de la transformation par rayons réciproques hors du plan de l'épicycloïde, et en un point quelconque de la perpendiculaire élevée au centre du cercle fixe. On obtient ainsi une courbe sphéro-conique, dont l'arc s' a pour expression différentielle

$$ds' = \frac{m\,d\psi}{1-m}\,\frac{\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi}}{b^2+a^2+m^2+2am\cos\psi},$$

en désignant par b la distance du pôle à l'origine primitive.

Cette expression peut encore être transformée par la substitution du n° 57, et l'on retrouve, pour valeur de l'arc indéfini, la fonction elliptique de troisième espèce, dont on aurait ainsi une nouvelle représentation. Nous supprimons, pour abréger, les remarques auxquelles donnerait lieu la discussion de cette dernière formule, ainsi qu'un rapprochement qu'il est naturel de faire entre notre méthode et celle que M. William Roberts a suivie autrefois [1] pour représenter les diverses

---

[1] *Journal de Liouville*, t. VIII, IX et X.

fonctions elliptiques par l'inverse sphérique d'une courbe du second degré (¹).

CHAPITRE XI.

EXTENSION A UNE SOMME QUELCONQUE D'INTÉGRALES DE LA MÉTHODE EXPOSÉE AU SECOND CHAPITRE. — POSSIBILITÉ DE NOUVELLES REPRÉSENTATIONS, EN NOMBRE ILLIMITÉ, D'UNE MÊME FONCTION ELLIPTIQUE DONNÉE, DE PREMIÈRE ESPÈCE.

67. Soient plusieurs lignes courbes planes données, définies chacune par deux équations entre les coordonnées rectangulaires

$$x, y, x_1, y_1, \ldots, \quad x_i, y_i$$

de chaque point et une variable auxiliaire correspondante t, $t_1, \ldots, t_i$; de telle sorte qu'on ait le système suivant :

$$(\text{A}) \qquad \begin{cases} x = \varphi(t), & x_1 = \varphi_1(t_1), \ldots, & x_i = \varphi_i(t_i), \\ y = \psi(t), & y_1 = \psi_1(t_1), \ldots, & y_i = \psi_i(t_i), \end{cases}$$

où φ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$, ψ, $\psi_1, \ldots, \psi_i$ désignent des fonctions données algébriques des variables t, $t_1, \ldots, t_i$. Supposons maintenant, de plus, que ces diverses variables soient liées entre elles par les relations nouvelles

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx_1}{dy_1} = \ldots = \frac{dx_i}{dy_i},$$

ou

$$(\text{B}) \qquad \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{\varphi'_1(t_1)}{\psi'_1(t_1)} = \frac{\varphi'_2(t_2)}{\psi'_2(t_2)} = \ldots = \frac{\varphi'_i(t_i)}{\psi'_i(t_i)},$$

formées au moyen des dérivées de toutes les fonctions précédentes.

Ces dernières équations expriment que les tangentes et les normales menées aux points correspondants des $i+1$ courbes considérées sont

---

(¹) L'ellipse coïncide évidemment avec l'hypocycloïde du premier ordre ($m = -1$). Cette courbe se change en hyperbole, lorsque, après avoir multiplié les seconds membres des équations du n° 41, par $p + \sqrt{q-1}$, on fait $m = -1$ et $a = \dfrac{p - q\sqrt{-1}}{p + q\sqrt{-1}}$. Nos théorèmes s'appliquent donc aux inverses *planes ou sphériques* d'une courbe quelconque du second degré à centre.

toujours respectivement parallèles, pour chaque système de valeurs simultanées des variables t, t_1,... et t_i.

68. Cela posé, formons les deux expressions

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \xi = m\varphi(t) + m_1\varphi_1(t_1) + \ldots + m_i\varphi_i(t_i), \\ \eta = m\psi(t) + m_1\psi_1(t_1) + \ldots + m_i\psi_i(t_i), \end{cases}$$

qui représentent les coordonnées d'une nouvelle courbe, en désignant par m, m_1,..., m_i des nombres constants quelconques. Cette dernière courbe sera algébrique, de même que les précédentes, et son équation résultera de l'élimination des $(i+1)$ variables t, t_1,..., t_i entre les $i+2$ équations (B) et (C).

69. En appelant s, s_1,..., s_i et σ les arcs indéfinis de toutes ces courbes, dont les diverses extrémités se correspondent mutuellement, on aura, en vertu des équations (A) et (B),

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx_1}{ds_1} = \ldots = \frac{dx_i}{ds_i} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy_1}{ds_1} = \ldots = \frac{dy_i}{ds_i} = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}},$$

d'où l'on déduira, pour les valeurs des différentielles $d\xi$ et $d\eta$,

$$\begin{aligned} d\xi &= m\,dx + m_1\,dx_1 + \ldots + m_i\,dx_i \\ &= \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}}(m\,ds + m_1\,ds_1 + \ldots + m_i\,ds_i) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\eta &= m\,dy + m_1\,dy_1 + \ldots + m_i\,dy_i \\ &= \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}}(m\,ds + m_1\,ds_1 + \ldots + m_i\,ds_i), \end{aligned}$$

ce qui donne, pour la valeur de la différentielle $d\sigma$ de l'arc σ,

$$d\sigma = m\,ds + m_1\,ds_1 + \ldots + m_i\,ds_i$$

et, par suite,

$$\sigma = ms + m_1s_1 + \ldots + m_is_i.$$

Il faut remarquer qu'on a, en outre,

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{\varphi'_1(t_1)}{\psi'_1(t_1)} = \ldots = \frac{\varphi'_i(t_i)}{\psi'_i(t_i)}$$

ou

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{dx}{dy} = \frac{dx_1}{dy_1} = \ldots = \frac{dx_i}{dy_i}.$$

Ainsi l'arc σ de la nouvelle courbe représente, en longueur, la somme des arcs des courbes primitives multipliées respectivement par des nombres constants quelconques; et, de plus, tous les arcs correspondants $s, s_1, \ldots, s_i$ et ce dernier σ sont compris sous le même angle formé par les normales menées aux extrémités de chacun d'eux.

Cette méthode est la traduction analytique d'un théorème remarquable dû à Jean Bernoulli, que ce géomètre a démontré par la considération d'un déplacement particulier des figures planes, appelé par lui *rampement* (motus reptorius) (1).

70. Il résulte de ce qui précède que lorsque le problème de la représentation de certaines transcendantes par les arcs de courbes algébriques aura été résolu par une méthode analogue à celle que nous avons fait connaître dans le Chapitre II de ce Mémoire, et qu'on sera parvenu à exprimer algébriquement les coordonnées rectangulaires de chaque courbe au moyen d'une même variable, on pourra ensuite en conclure la possibilité d'effectuer de même la représentation d'une somme quelconque de ces fonctions transcendantes. Il suffira de former le système des $i+2$ équations algébriques (B) et (C), et d'éliminer entre elles les $i+1$ variables auxiliaires; l'arc de la courbe algébrique obtenue sera exprimé par une somme de transcendantes ayant la forme prescrite.

71. On tire de cette méthode générale une conséquence intéressante, quand on l'applique aux fonctions transcendantes dont on peut effectuer l'addition algébriquement, et dont on peut obtenir en même temps, une représentation par des arcs dissemblables. Ainsi si l'on combine un cercle quelconque avec une courbe dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle, qu'on fasse ensuite correspondre algé-

---

(1) Voir *Opera*, t. Ier, *De motu reptorio*, p. 408.

briquement entre eux, deux à deux, les arcs de ces courbes, on en déduira une nouvelle courbe, également algébrique, qui jouira de la même propriété, et, en partant de cette dernière, on pourra encore continuer à l'infini à en former d'autres par le même procédé.

Il existe donc une infinité de courbes différentes de celles que nous avons considérées et dont les arcs sont égaux respectivement à des arcs de cercle.

72. Le même raisonnement est applicable à la fonction elliptique de première espèce. Formons, par exemple, le système des équations de deux courbes identiques, mais de position différente,

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \varphi(t) = \dfrac{\cos p^2 t + p\cos t}{1 + p^2 + 2p\cos(1-p^2)t}, \\[2ex] y = \psi(t) = \dfrac{\sin p^2 t + p\sin t}{1 + p^2 + 2p\cos(1-p^2)t}, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u) = \dfrac{\cos p^2 u - p\cos u}{1 + p^2 - 2p\cos(1-p^2)u}, \\[2ex] y_1 = \psi_1(u) = \dfrac{\sin p^2 u - p\sin u}{1 + p^2 - 2p\cos(1-p^2)u}, \end{cases}$$

qui représentent chacune la fonction elliptique de première espèce, au module p, que nous supposerons être un nombre essentiellement positif, égal à la racine carrée d'un nombre commensurable quelconque.

Les équations (B) deviendront ici

$$(3)\qquad \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{\varphi'_1(u)}{\psi'_1(u)}.$$

En combinant cette dernière équation avec les deux autres,

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi = \varphi(t) + m\varphi_1(u), \\ \eta = \psi(t) + m\psi_1(u), \end{cases}$$

où m désigne un nouveau nombre commensurable quelconque, l'élimination de t et u entre les équations (3) et (4) déterminera une nouvelle courbe algébrique qui représentera encore, par son arc indéfini, la fonction elliptique de première espèce, au module p.

En effet, on aura, d'après ce qui a été dit plus haut, en désignant par s, s_1 et σ les arcs respectifs de ces trois courbes algébriques,

$$\sigma = s + ms_1;$$

d'autre part, les intégrales à modules complémentaires

$$s = \frac{p}{1-p^2}\int_0^t \frac{d(1-p^2)t}{\sqrt{1+p^2+2p\cos(1-p^2)t}},$$

$$s_1 = \frac{p}{1-p^2}\int_0^u \frac{d(1-p^2)u}{\sqrt{1+p^2-2p\cos(1-p^2)u}}$$

sont susceptibles d'être ramenées à la même forme par les deux substitutions (nº 62)

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sin(1-p^2)t}{p+\cos(1-p^2)t},$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin(1-p^2)u}{-p+\cos(1-p^2)u},$$

qui permettent d'exprimer les arcs s et s_1 par les formules

$$s = \frac{p}{1-p^2}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-p^2\sin^2\theta}} = \frac{p}{1-p^2}\,\mathrm{F}(p,\theta),$$

$$s_1 = \frac{p}{1-p^2}\int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{1-p^2\sin^2\omega}} = \frac{p}{1-p^2}\,\mathrm{F}(p,\omega).$$

On aura, par suite, pour valeur de l'arc σ,

$$\sigma = \frac{p}{1-p^2}[\mathrm{F}(p,\theta) + m\mathrm{F}(p,\omega)] = \frac{p}{1-p^2}\,\mathrm{F}(p,\varpi),$$

et la nouvelle amplitude ϖ sera liée aux amplitudes θ et ω, au moyen du théorème connu sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce.

Il est donc maintenant démontré que l'arc de la courbe algébrique représentée par l'ensemble des équations (1), (2), (3) et (4) a pour valeur exacte la fonction elliptique de première espèce dont le module est égal à la racine carrée d'un nombre commensurable quelconque.

En faisant varier m, on obtiendra ainsi une infinité de courbes algébriques différentes de chacune desquelles on continuera, si l'on veut, à déduire de nouvelles, et toutes ces courbes jouiront encore de la même propriété.

73. Les calculs auxquels conduit la méthode que nous venons d'exposer peuvent être extrêmement abrégés, en ayant recours à la formule déjà donnée au n° 21 du Chapitre II, pour représenter la fonction elliptique de première espèce au module $p = \sqrt{\frac{n'-1}{n'}}$.

Posons en effet

$$z = e^{t\sqrt{-1}} = \cos t + \sin t\sqrt{-1}, \quad \zeta = e^{u\sqrt{-1}} = \cos u + \sin u\sqrt{-1}, \quad \rho = \xi + \eta\sqrt{-1}.$$

A l'aide de ces trois nouvelles variables auxiliaires z, ζ et ρ, on s'assurera aisément que les équations (1), (2), (3) et (4) sont susceptibles d'être remplacées par les deux suivantes :

$$\rho = \frac{z}{z^{1-p^2} + p} + m\frac{\zeta}{\zeta^{1-p^2} - p}, \tag{5}$$

$$z^2 \frac{p z^{1-p^2} + 1}{p z^{p^2-1} + 1} \left(\frac{z^{p^2-1} + p}{z^{1-p^2} + p}\right)^2 = \zeta^2 \frac{p\zeta^{1-p^2} - 1}{p\zeta^{p^2-1} - 1} \left(\frac{\zeta^{p^2-1} - p}{\zeta^{1-p^2} - p}\right)^2. \tag{6}$$

Si l'on élimine ζ de ces dernières, qu'on mette pour ρ et z leurs valeurs imaginaires et qu'on décompose l'équation résultante en deux équations réelles, on en tirera, par l'élimination de t, une équation finale entre les coordonnées ζ, η et les deux paramètres commensurables p et m. Ce sera l'équation de la courbe cherchée, dont l'arc indéfini est, comme on l'a montré plus haut,

$$\sigma = \frac{p}{1-p^2} F(p, \varpi).$$

D'autres conséquences, relatives à la théorie des fonctions elliptiques, se déduiraient encore de certaines équations analogues à (5) et (6); mais nous ne les examinerons pas en ce moment.

ÉTUDE

DES

PHÉNOMÈNES ÉLECTROSTATIQUES

DANS LES PILES,

PAR M. ÉDOUARD BRANLY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, AGRÉGÉ DES SCIENCES PHYSIQUES,
RÉPÉTITEUR DE PHYSIQUE A L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES.

INTRODUCTION.

Ce travail a pour objet une étude des phénomènes électrostatiques qui se présentent en Électricité dynamique, soit aux deux pôles des appareils électromoteurs ouverts, soit sur les conducteurs traversés par les courants.

Je me suis d'abord proposé de construire un instrument permettant de répéter simplement les mesures déjà faites et rendant, par la facilité et la sûreté de son emploi, les recherches plus rapides. Après avoir vérifié avec cet appareil la plupart des résultats relatifs à ces phénomènes, j'ai abordé l'étude de plusieurs questions jusqu'ici obscures. Le temps ne m'a pas encore permis de les examiner complétement; je ne présente ici que les premiers résultats.

Au début de ces recherches, je crois utile de rappeler quelques définitions, le même terme ayant souvent été employé par divers auteurs dans des acceptions différentes.

Quantité d'électricité. — Si deux sphères égales sont mises en contact, elles contiennent, quand on les électrise, des quantités égales

d'électricité. Si une sphère électrisée est mise en contact avec une sphère égale et à l'état neutre, chacune, après le contact, renferme la moitié de l'électricité que la première possédait précédemment.

Unité d'électricité. — L'unité d'électricité sera la quantité qui, étant concentrée en un point, exercera sur une quantité égale, concentrée à une distance égale à l'unité de longueur, la même action que l'unité de force accélératrice sur l'unité de masse. Cela revient à faire $K = 1$ dans la formule qui résume les lois de Coulomb, $F = K\frac{ee'}{d^2}$. Nous prendrons pour unité de longueur le millimètre, pour unité de masse la masse d'un milligramme, et pour unité de temps la seconde. Le poids d'un milligramme à Paris vaut 9808 unités de force.

Densité ou charge électrique. — La densité électrique d'une surface chargée uniformément est la quantité d'électricité distribuée sur l'unité de surface. Supposons une sphère électrisée, ayant un rayon égal à l'unité et possédant l'unité d'électricité : la surface est 4π; $\frac{1}{4\pi}$ représente la quantité d'électricité répartie sur l'unité de surface de la sphère : c'est la densité électrique sur la sphère. Si le rayon est R et si elle renferme Q unités d'électricité, $\frac{Q}{4\pi R^2}$ sera la densité.

Sur un conducteur quelconque, la densité est, en général, variable en chaque point; y étant la densité en un point, $y\,ds$ sera la quantité d'électricité sur l'élément infiniment petit ds. La quantité d'électricité, divisée par la surface de l'élément, mesure la densité. La quantité totale d'électricité qui se trouve sur le conducteur est $\int y\,ds$. L'expression *charge électrique* en un point a la même signification que le mot *densité*.

Épaisseur électrique. — Pour figurer l'électricité répandue à la surface des corps conducteurs, on a souvent attribué à la couche une épaisseur; l'épaisseur est en chaque point proportionnelle à la densité.

Potentiel. — Représentons par r la distance d'une masse électrique dq à un point P déterminé ayant pour charge l'unité d'électri-

cité, l'expression $V = \sum \frac{dq}{r}$ s'appelle le *potentiel* par rapport au point P de toutes les masses électriques agissantes. La projection sur une direction donnée Px de la résultante des forces qui agissent sur le point P a pour valeur la dérivée du potentiel par rapport à cette direction, ou $\frac{dV}{dx}$.

Quand l'équilibre est établi, la résultante des actions sur un point quelconque intérieur d'un conducteur doit être nulle; $\frac{dV}{dx}$ est nul pour toute direction Px : il s'ensuit que le potentiel par rapport à tout point intérieur d'un conducteur doit être constant dans l'état d'équilibre. Le potentiel intérieur est variable d'un conducteur à l'autre.

L'équilibre ayant lieu, si l'on multiplie dans un certain rapport la quantité d'électricité répandue sur chaque élément, l'équilibre subsiste encore, et $\sum \frac{dq}{r}$ augmente dans le même rapport. Le potentiel est donc proportionnel à la charge totale Q; $V = \lambda Q$, λ étant une constante qui dépend de la forme et des dimensions du conducteur.

Unité de potentiel. — Une sphère de rayon R étant chargée d'une quantité d'électricité Q, son potentiel intérieur est $\frac{Q}{R}$; il est égal à 1 si le rayon est égal à l'unité de longueur et si la quantité totale d'électricité répandue sur la sphère est l'unité. Nous prendrons ce potentiel pour unité de potentiel.

Le potentiel d'un corps conducteur communiquant avec le sol est nul.

Tension. — Les molécules du fluide électrique qui se trouve sur la surface d'un corps électrisé tendent à s'écarter les unes des autres. L'électricité exerce normalement sur l'air un effort : c'est à cette pression contre l'air que l'on a donné primitivement le nom de *tension électrique*. La tension en un point est proportionnelle au carré de la densité électrique. On a quelquefois aussi confondu les expressions *densité* et *tension*. Enfin une autre signification a été également donnée au mot *tension* en Électricité dynamique; il est alors synonyme du mot *potentiel*. Quand nous l'emploierons, ce sera dans ce dernier sens.

I. — *Appareils de mesure pour les déterminations électrométriques.*

Balance de Coulomb. — Les appareils employés pour les déterminations électrométriques dérivent, en général, de la balance de Coulomb. Dans cet appareil, la torsion d'un fil élastique de métal ou de verre fait équilibre à l'action électrique qui s'exerce entre deux boules conductrices.

La balance de Coulomb est trop connue pour qu'il soit utile de la décrire en détail. La forme que lui a donnée l'auteur était la plus convenable pour le but qu'il se proposait : la recherche des lois élémentaires en Électricité et l'étude de la distribution à l'aide du plan d'épreuve.

Pour mesurer avec la balance de Coulomb les densités électriques, on touche le point à étudier avec le plan d'épreuve, et l'on porte ce dernier dans la balance où il remplace la boule fixe. On obtient ainsi les rapports des densités électriques aux différents points.

Détermination avec la balance de Coulomb du potentiel intérieur d'un conducteur électrisé. — S'il s'agit de mesurer le potentiel intérieur d'un conducteur électrisé, on relie par un fil long et fin la balle fixe de la balance avec le conducteur étudié; le conducteur, le fil et la sphère forment alors un système unique en équilibre; le potentiel du système par rapport à un point intérieur du conducteur n'a pas changé d'une façon appréciable, et il est le même que celui de la sphère supposée isolée, si le fil est assez long et assez fin. La mesure obtenue avec la balance fournit la quantité d'électricité Q de la sphère, proportionnelle à son potentiel $\frac{Q}{R}$, qui est aussi celui du conducteur.

Tandis que la densité électrique sur un conducteur varie en général avec la position de l'élément touché par le plan d'épreuve, on obtient toujours la même déviation de la boule mobile en mettant la boule fixe en communication avec le conducteur par un fil long et fin, quel que soit le point du conducteur auquel le fil est relié.

L'expérience a été faite avec la balance ordinaire de Coulomb et un

ellipsoïde de révolution dont le grand axe avait 60 centimètres et le petit axe 20 centimètres. Cet ellipsoïde était placé à 4 mètres de la balance. Aux extrémités de chacun des deux axes était soudé un fil de cuivre de 1 millimètre de diamètre, terminé à l'autre bout par une sphère de 5 millimètres de diamètre. Cette sphère pouvait être posée sur un petit disque extérieur à la cage de la balance et communiquant avec la boule fixe par un fil de cuivre.

L'ellipsoïde est d'abord électrisé avec un bâton de résine frotté. On applique sur le disque relié à la boule fixe la sphère qui termine le fil soudé à l'extrémité du petit axe. Les deux boules de la balance se chargent, et l'on attend que la boule mobile qui a été repoussée ait pris une position fixe d'équilibre. On écarte alors la sphère qui est appliquée sur le disque, et l'on place sur le disque la sphère qui termine le fil soudé à l'extrémité du grand axe. La boule mobile ne bouge pas.

L'ellipsoïde est déchargé ainsi que la boule fixe de la balance. La boule mobile revient au contact de la boule fixe.

On ne peut éviter une déperdition continue et assez rapide de l'électricité, puisque le disque circulaire et les sphères que l'on met successivement en contact avec lui se trouvent nécessairement dans l'air de la chambre. Un miroir fixé sur le fil de torsion a permis de constater avec une lunette que le déplacement lent de l'aiguille mobile restait le même quand on remplaçait sur le disque l'une des sphères par l'autre. Il est bon d'électriser fortement l'ellipsoïde; la charge de la boule mobile est alors plus grande, et comme elle se perd très-lentement dans la balance, l'écart des deux boules est plus considérable. Plusieurs observations ont été faites avec des écarts d'environ 15 degrés.

Les modifications apportées à la balance de Coulomb ont été motivées par la nécessité d'accroître la sensibilité de l'appareil sans rien enlever à la sûreté de ses indications. La balance possède sur les autres instruments l'avantage de donner des mesures susceptibles d'être évaluées immédiatement au moyen de l'unité de force.

La première idée qui vint à l'esprit pour augmenter la sensibilité fut d'adjoindre à la balance un condensateur, comme Volta l'avait fait pour son électroscope à lames d'or. C'est ainsi que Biot a opéré pour mesurer les tensions électriques aux pôles d'une pile.

Électromètre de Dellmann et Kohlrausch. — Dellmann remplaça la boule fixe par une bande métallique, et la boule mobile par une aiguille de métal suspendue à un fil de verre. On peut, au moyen d'un levier, amener la bande de métal au contact avec l'aiguille, puis, le partage électrique ayant eu lieu, la bande est abaissée. Comme la bande et l'aiguille se repoussent suivant toute leur longueur, la surface des conducteurs qui agissent l'un sur l'autre est plus grande que dans la balance de Coulomb.

Dans la balance de Coulomb on peut, sans erreur sensible, en se plaçant dans des conditions convenables, considérer chaque boule comme réduite à son centre, ce qui permet d'évaluer aisément la force de répulsion quand on connaît la distance des centres. Dans l'appareil de Dellmann, la distribution de l'électricité sur l'aiguille et sur la bande devant varier quand l'angle d'écart change, il est nécessaire de ramener toujours par une torsion convenable l'aiguille à faire le même angle avec la plaque fixe. Dans ce cas seulement, les racines carrées des torsions sont proportionnelles aux quantités d'électricité. Il est plus commode d'observer les déviations telles qu'elles se présentent, sans ramener chaque fois, par une torsion convenable, à une même distance angulaire; mais il faut alors établir une table de graduation, indiquant, pour une déviation observée, la torsion qui peut maintenir l'aiguille à une distance angulaire déterminée, 30 degrés, par exemple.

Kohlrausch fit usage de l'électromètre de Dellmann, et en même temps d'un condensateur à lame d'air.

Électroscope de Bohnenberger. — Bohnenberger donna, en 1816, la description d'un électroscope très-sensible : une lame d'or battu, longue de 6 centimètres et large de 7 millimètres, se trouvait exactement placée au milieu de l'intervalle compris entre deux boules formant les pôles d'une pile sèche. La lame est également attirée de part et d'autre; mais si, par la tige de métal à laquelle elle est suspendue, on lui communique une très-petite quantité d'électricité, l'extrémité inférieure de la lame d'or est attirée par la boule de métal qui possède l'électricité opposée, et repoussée par la boule qui possède la même électricité.

Électromètre de Fechner et Hankel. — Fechner remplaça les boules

polaires de la pile sèche par des disques métalliques agissant sur une plus grande étendue de la lame d'or. C'est sous cette forme que l'appareil a été employé par Hankel dans ses recherches sur l'électricité atmosphérique. Un microscope lui permettait d'estimer exactement les petits déplacements de la lame. Enfin, comme la pile sèche a l'inconvénient de donner aux plateaux une charge qui varie avec la température, Hankel lui substitua une pile formée d'un grand nombre d'éléments : zinc, cuivre et eau ordinaire.

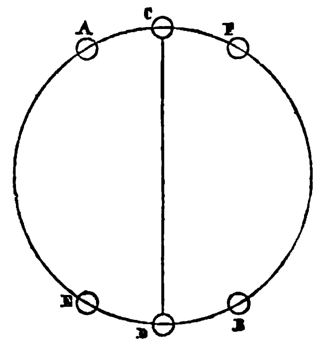
Les nombres suivants permettront d'apprécier le degré de sensibilité auquel Hankel est arrivé. Dans une de ses expériences, les deux plateaux sont reliés aux pôles d'une pile de 24 éléments; la lame d'or est à 5 millimètres de chacun des plateaux et communique avec l'un des pôles d'une pile de 15 éléments dont l'autre pôle est en communication avec le sol. Le microscope viseur est muni d'un micromètre oculaire dont les divisions valent $\frac{1}{6}$ de millimètre. Les déviations sont évaluées en divisions du micromètre. Ici la déviation est 4,12; avec une pile de 30 éléments, la déviation est 8,36. Lorsque la déviation devient supérieure à 8, elle cesse d'être proportionnelle à la charge de la feuille d'or. Si la distance de la lame aux disques est plus grande que dans l'expérience précédente, la déviation peut augmenter sans que la proportionnalité cesse d'exister, mais la sensibilité diminue. Ainsi, la distance de la lame à chacun des plateaux étant de 10 millimètres et la pile dont le pôle est mis en communication avec la lame d'or étant formée de 10 éléments, la déviation obtenue était 1,5. Pour avoir une déviation 10, — et l'on ne pourrait demander moins pour les mesures électrostatiques dans le circuit d'un élément Daniell, — il faudrait une charge d'environ 3000 éléments : zinc, cuivre et eau; mais, avec une pareille charge, la proportionnalité cesserait pour des déviations bien inférieures à 10.

Balance à miroir de Hankel. — Afin d'évaluer en unités électrostatiques les petites quantités d'électricité, Hankel adopta pour la balance de torsion une disposition qui la rapproche des appareils dont il nous reste à parler.

Quatre boules fixes A, F, E, B (*fig.* 1), soutenues par des tiges de laiton, sont placées aux sommets d'un rectangle; deux boules situées

sur une même diagonale sont reliées à l'un des pôles d'une pile de Volta, les deux autres à l'autre pôle de la même pile. Une aiguille métallique soutenue par un fil d'acier porte deux autres boules C et D à

Fig. 1.



ses extrémités. On comprend que, si l'on charge l'aiguille mobile, elle se comportera comme la lame d'or de l'électroscope de Bohnenberger. Un miroir solidaire du fil de torsion permet d'évaluer la déviation et la torsion. Hankel obtint une déviation d'environ 1 degré en employant une pile de 406 éléments : zinc, cuivre et eau. Le pôle positif communiquait avec A, B, C, D, le pôle négatif avec F et E. Si l'on remplace les quatre boules fixes par des plateaux, on augmente la sensibilité, comme Dellmann l'avait fait, en substituant aux deux boules de la balance de Coulomb deux bandes métalliques.

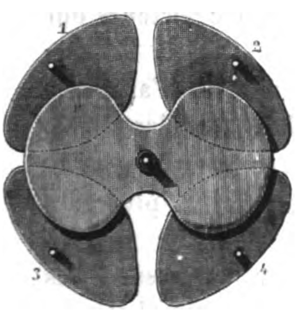
Électromètre de Thomson. — Cette disposition a été suivie par M. W. Thomson. Dans l'intérieur d'une boîte cylindrique en laiton, fendue suivant deux diamètres rectangulaires, se meut une lame d'aluminium ayant la forme d'un 8; elle est soutenue par un fil de torsion, et porte à sa partie inférieure une tige de platine qui plonge dans l'acide sulfurique. Sur le fil de torsion est fixé un miroir. M. Thomson a remplacé la pile qui sert à charger les plateaux de l'électromètre de Fechner par une bouteille de Leyde dont l'acide sulfurique forme l'armature interne, et une feuille d'étain l'armature externe. L'emploi de la bouteille de Leyde présente des inconvénients, car il est très-difficile de maintenir sa charge constante. M. Thomson a cherché à

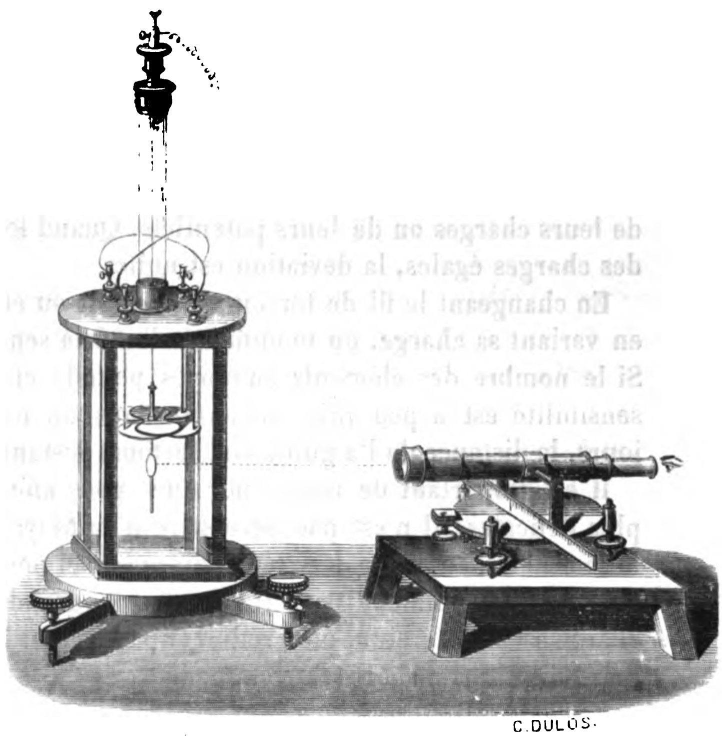
lever cette difficulté par un choix convenable du verre et une dessiccation complète. L'acide sulfurique qu'il emploie à cet effet, et qui constitue l'armature interne, communique sa charge à l'aiguille d'aluminium. L'électromètre renferme un indicateur de la charge et un petit appareil destiné à régler la charge du condensateur. Ces différents accessoires compliquent beaucoup l'instrument.

Description d'un nouvel électromètre. — Pour les mesures que je me proposais d'effectuer, j'ai construit un électromètre dans lequel j'ai emprunté à l'appareil de M. Thomson la disposition en secteurs. Ce nouvel instrument (*fig.* 2 et *fig.* 3), composé d'un petit nombre de pièces, est d'une construction facile et d'un usage très-simple.

Fig. 3.

Fig. 2.





Une aiguille métallique de large surface se meut horizontalement au-dessus de quatre secteurs formant les quadrants d'un même cercle,

et reliés deux à deux en diagonale. Le centre de l'aiguille et celui du cercle sont sur une même verticale. L'aiguille est soutenue par un fil métallique qui communique avec le pôle positif d'une pile et en reçoit une charge permanente d'électricité.

Pour mesurer la différence de potentiel entre A et B, on relie A aux secteurs 1 et 4, qui prennent le potentiel de A et B aux secteurs 2 et 3, qui prennent le même potentiel que B. La différence entre les quantités d'électricité des deux couples de secteurs est proportionnelle à la différence des potentiels de A et de B. L'aiguille est attirée par l'un des couples de secteurs et repoussée par l'autre. Pour un certain angle d'écart, il y a équilibre entre la force de torsion du fil et l'action électrique.

L'axe de suspension se prolonge au-dessous de l'aiguille par un fil métallique auquel est fixé un miroir. On peut mesurer les déviations en lisant, à l'aide d'une lunette, les divisions d'une règle graduée réfléchies par le miroir. En ayant soin d'opérer avec de faibles déviations, la distance des divers points de l'aiguille aux secteurs varie très-peu. L'action exercée sur l'aiguille par les deux couples de secteurs est alors proportionnelle au produit de la charge de l'aiguille par la différence de leurs charges ou de leurs potentiels. Quand les quatre secteurs ont des charges égales, la déviation est nulle.

En changeant le fil de torsion, en élevant ou en abaissant l'aiguille, en variant sa charge, on modifie à volonté la sensibilité de l'appareil. Si le nombre des éléments employés pour la charge ne varie pas, la sensibilité est à peu près constante dans un intervalle de plusieurs jours, la distance de l'aiguille aux secteurs restant la même.

Il est important de remarquer que, pour effectuer les mesures les plus délicates, il n'est pas nécessaire d'employer de fortes charges : 50 ou même 20 éléments, zinc, cuivre et eau peuvent suffire pour étudier un seul élément Daniell. Comme la grandeur des éléments de charge est indifférente, on a réduit suffisamment leurs dimensions pour en rendre le transport très-commode.

II. — *Phénomènes électrostatiques aux deux pôles d'une pile dont le circuit est ouvert.*

Quand le circuit d'une pile est ouvert, on observe des différences dans l'état électrique des deux pôles. Dans le premier élément de pile, Volta reconnut avec son électroscope que l'un des métaux présente de l'électricité résineuse et l'autre de l'électricité vitrée. Une étude plus approfondie le conduisit à deux principes qui servent de base à la construction des piles :

1° La différence des tensions aux deux pôles est constante, que l'élément soit isolé ou qu'il communique par l'un de ses pôles avec le sol; de plus elle ne varie pas avec les dimensions de l'élément.

2° Lorsque plusieurs éléments sont réunis de façon que le zinc du premier soit en contact avec le cuivre de l'élément suivant, la différence des tensions aux deux pôles de chaque élément est constante et indépendante de l'état électrique de l'élément, aux deux pôles extrêmes; elle est égale à la somme des différences partielles.

MESURES EFFECTUÉES AVEC LA BALANCE DE COULOMB.

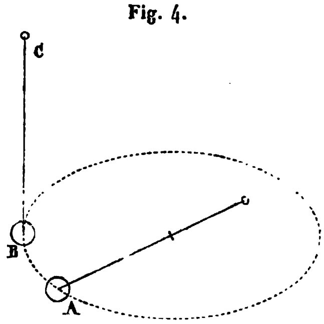
Si nous supposons une pile construite et l'un de ses pôles mis en communication avec le sol, la densité électrique est variable aux différents points de la surface de l'autre pôle et la tension ou le potentiel est constant.

Densité aux différents points du pôle de la pile. — La confirmation expérimentale de la distinction entre la densité et la tension au pôle d'une pile s'effectue avec une balance de Coulomb (*fig.* 4). Une balle mobile A de 8 millimètres de rayon a été fixée à l'extrémité d'une tige de verre horizontale soutenue par un fil de torsion en cuivre recuit ayant $\frac{1}{10}$ de millimètre de diamètre; ce fil était mis en communication métallique avec la balle. Une boule fixe B de 1 centimètre de rayon était portée par une tige mince en laiton terminée à l'extérieur de la cage par une petite boule C de $\frac{1}{4}$ de centimètre de rayon. On chargeait la balle mobile négativement et d'une façon permanente par le pôle positif d'une pile de 100 éléments à eau dont le

27.

pôle négatif était relié au sol. On mettait d'abord les centres des deux boules à une certaine distance sans torsion. Un miroir dans le prolongement du fil de torsion réfléchissait les divisions d'une règle graduée en millimètres, placée à 3 mètres, et permettait, à l'aide d'une lunette, de mesurer les déplacements de la balle mobile et la torsion du fil.

Fig. 4.



Après avoir assemblé 700 éléments zinc, cuivre et eau, et relié au sol le pôle négatif, on a fixé au pôle positif le centre d'un disque métallique de 50 centimètres de diamètre. Avec un plan d'épreuve ayant 1 centimètre de diamètre, on touchait alternativement le centre et le bord du disque. Le plan d'épreuve était mis ensuite un instant en contact avec la petite boule C. Celle-ci prenait alors ainsi que B une partie de la charge du plan d'épreuve.

En opérant ainsi, on observe pour la boule mobile des déviations notablement différentes dans les deux cas. Ainsi, dans une des expériences, on a trouvé $4^{mm},5$ pour le centre et $10^{mm},5$ pour le bord. Les surfaces des deux boules ayant été amenées à une distance de $\frac{1}{2}$ centimètre seulement afin de rendre l'expérience possible, il n'est pas possible de déduire de ces nombres le rapport exact des densités; on ne peut que constater une différence très-marquée.

Potentiel au pôle de la pile. — Par l'emploi du plan d'épreuve, on ne peut donc pas définir aisément l'état électrique de l'élément, puisque les nombres obtenus dépendent de la forme des pôles et du point touché; mais si la boule fixe est mise en communication avec le pôle par un long fil conducteur, la déviation observée est toujours la même, quel que soit le point touché. On constate également que la forme du

pôle et les dimensions des conducteurs qui le terminent n'ont pas d'influence. Lorsque l'équilibre est établi, le potentiel est devenu le même sur la boule et sur la lame métallique qui forme le pôle : ce potentiel est $\frac{E}{R}$ sur la sphère, E représentant la quantité d'électricité qui la recouvre et R le rayon. La balance de torsion mesure E, c'est-à-dire, à une constante près, le potentiel par rapport à un point quelconque du pôle.

Expériences de Biot. — Des deux principes énoncés plus haut, Biot a déduit la distribution des tensions électriques dans une pile isolée ou dans une pile communiquant par l'un de ses pôles avec le sol. Pour ce dernier cas au moins (¹), il a exécuté des vérifications expérimentales à l'aide d'une balance de Coulomb et d'un condensateur. Le plateau collecteur relié à l'un des pôles de la pile prend le même potentiel V que ce pôle. Le potentiel du pôle ou celui du collecteur est proportionnel à la charge Q du collecteur; $V = \lambda Q$, la constante λ dépendant de la forme et des dimensions du condensateur. On supprime les communications et l'on sépare les plateaux; Q se mesure à l'aide de la balance et les nombres obtenus sont proportionnels à V.

Biot trouva sur la boule fixe de sa balance des quantités d'électricité proportionnelles au nombre des éléments de la pile. La mesure est difficile à répéter, car d'autres observateurs obtinrent après lui des résultats différents. D'après des expériences faites en 1837 par Peltier à l'aide de son électromètre, la tension statique augmenterait comme le carré du nombre des couples.

Plus récemment, Kohlrausch et Hankel ont supposé démontrée la loi de Biot et l'ont prise comme point de départ des expériences par lesquelles ils se sont assurés de la marche régulière de leurs instruments de mesure.

Vérification de la loi de Biot. — En employant une balance de torsion à miroir, on vérifie aisément et sans condensateur que la tension croît proportionnellement au nombre des couples.

(¹) Biot n'a pas laissé de mesures dans le cas de la pile isolée; dans ce cas il avait trouvé que la charge transmise à la boule fixe était incomparablement plus faible qu'elle ne devrait être si la tension était moitié de ce qu'elle est dans le cas où l'un des pôles communique avec le sol.

Dans les expériences que je vais décrire, le fil de torsion était en cuivre rouge recuit et avait $\frac{1}{10}$ de millimètre de diamètre. La boule fixe et la boule mobile étaient en liége doré et avaient un rayon sensiblement égal; elles se trouvaient en communication métallique entre elles. Les deux boules étaient d'abord écartées l'une de l'autre d'un certain angle sans qu'il y eût torsion du fil; la distance de leurs centres était alors de $28^{mm},8$. Un miroir de verre argenté était fixé sur le prolongement du fil de torsion.

On a observé les positions d'équilibre suivantes pour la boule mobile:

	mm
Les deux boules étant reliées entre elles et avec le sol......	220,6
Les deux boules communiquant avec le pôle positif d'une pile de 250 éléments zinc, cuivre et eau, dont le pôle négatif touchait au sol..................................	130,0
Les deux boules communiquant de même avec le pôle positif d'une pile de 200 éléments..........................	160,0
Les deux boules communiquant de même avec le pôle positif d'une pile de 100 éléments..........................	204,7
Position d'équilibre après la décharge....................	220,7

ÉQUILIBRE des boules.	LECTURES avec la lunette.	TORSIONS EN DIVISIONS de la règle.	TORSIONS EN ANGLES (la règle était à $3^m,09$ du miroir).	DISTANCES angulaires des deux boules (¹).
A l'état neutre.	220,6			$\frac{\alpha}{2} = 7°31'20''$
Communiquant avec 250 élém.	130,0	$\frac{220,6 - 130}{2} = 45^{mm},3$	$t' = \frac{45,3}{3090} \times \frac{360}{2\pi} = 2988''$	$\frac{\alpha'}{2} = 7.56.14$
Avec 200.....	160,0	$\frac{220,65 - 160}{2} = 30,32$	$t'' = 2016''$	$\frac{\alpha''}{2} = 7.48.\ 8$
Avec 100.....	204,7	$\frac{220,7 - 204,7}{2} = 8,00$	$t''' = 533''$	$\frac{\alpha'''}{2} = 7.35.46$
A l'état neutre.	220,7			

(¹) La longueur du bras de levier de la boule mobile était de 110 millimètres; $d = 28^{mm},8$, pour la première position.

Appelons q', q'', q''' la charge de l'une des boules quand elles communiquent avec 250 éléments, 200 éléments, 100 éléments, nous aurons

$$q'^2 = \mu \frac{t' \sin^2 \frac{\alpha'}{2}}{\cos \frac{\alpha'}{2}} = \mu 57,53,$$

$$q''^2 = \mu \frac{t'' \sin^2 \frac{\alpha''}{2}}{\cos \frac{\alpha''}{2}} = \mu 37,5,$$

$$q'''^2 = \mu \frac{t''' \sin^2 \frac{\alpha'''}{2}}{\cos \frac{\alpha'''}{2}} = \mu 9,354.$$

Si la loi énoncée est vraie, on doit trouver

$$q''^2 = 4 q'''^2, \quad q'^2 = \frac{25}{4} q'''^2, \quad q'^2 = \frac{25}{16} q''^2.$$

Or on a

$9,354 \times 4 = 37,42$	au lieu de	$37,5$
$9,354 \times \frac{25}{4} = 58,4$	»	$57,53$
$37,500 \times \frac{25}{16} = 57,65$	»	$57,53$

On voit que l'accord est satisfaisant.

Les mêmes nombres peuvent servir à mesurer en unités électrostatiques la différence de potentiel aux deux pôles d'un élément. Cette détermination permettra d'employer les piles comme sources d'électricité statique ayant une valeur connue.

Calcul de la différence de potentiel aux deux pôles de l'élément zinc, cuivre et eau. — Nous prendrons les notations suivantes :

q quantité d'électricité répartie sur la boule mobile dont le rayon est $8^{mm},12$;

q_1 quantité d'électricité de la boule fixe dont le rayon est $8^{mm},4$;

$q_1 = q \left(\frac{8,4}{8,12}\right) = 1,03 q$;

α distance angulaire des deux boules pour une charge donnée;
r rayon de cercle décrit par le centre de la boule mobile $r = 110^{mm}$;
t torsion produite par la répulsion des deux boules, exprimée en secondes;
n_1 moment du couple nécessaire pour tordre le fil d'un arc égal au rayon;
n pour le tordre de 1 seconde.

Nous avons

$$\frac{qq_1 \cos\frac{\alpha}{2}}{4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = nt.$$

Dans le cas de la seconde observation, celle qui a été faite avec 200 éléments, l'équation devient

$$\frac{1{,}03q^2 \cos 7^\circ 48' 8''}{4 \times (110)^2 \sin^2 7^\circ 48' 8''} = nt.$$

n_1 a été obtenu en faisant osciller le fil après l'avoir tendu par un fil cylindrique de cuivre de longueur l et de poids p déterminés.

En représentant par θ la durée d'une oscillation simple, on a

$$\theta = \pi \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{n_1}},$$

$$\Sigma mr^2 = \frac{pl^2}{12}\ (^1)$$

et, par suite,

$$n_1 = \pi^2 \frac{pl^2}{12\,t^2},$$

$$n_1 = 3282905{,}36.$$

Pour tordre le fil d'un arc égal au rayon, c'est-à-dire d'un arc de $57^\circ 17' 44'',8$, il fallait donc appliquer à 1 millimètre du centre de mou-

(1) L'unité de force est la force qui communique à la masse de 1 milligramme une accélération égale à 1 millimètre

vement une force représentée par $\frac{3282905}{9808,8}$ ou 334 milligrammes, puisque le poids de 1 milligramme vaut 9808,8 unités de force.

S'il s'agit de tordre le fil de 1 seconde,

$$n = 15,9.$$

Ici

$$nt = 15,9 \times 2016 = 32054,4.$$

On obtient

$$q = 5293 \quad \text{et} \quad \frac{q}{200} = 26,46.$$

Le potentiel, pour un seul élément zinc, cuivre et eau, sera

$$\frac{\frac{q}{200}}{8,12} \quad \text{ou} \quad \frac{26,46}{8,12} = 3,26;$$

$\frac{\frac{q}{200}}{4\pi(8,12)^2}$ sera la densité électrique sur la sphère mobile, $\frac{\frac{q}{200}}{4\pi(8,4)^2}$ la densité sur la sphère fixe.

Calcul de la différence de potentiel aux deux pôles de l'élément zinc, platine et eau. — Ces éléments étaient formés de fils de zinc et de fils de platine plongés dans l'eau ordinaire filtrée.

Dans la balance employée pour les mesures, deux boules fixes agissaient sur deux boules mobiles soutenues par une aiguille de verre. Le fil de torsion était un fil de cuivre recuit de $\frac{1}{10}$ de millimètre de diamètre. Le pôle positif d'une pile de 200 éléments était relié par un long fil aux deux boules fixes et aux deux boules mobiles; le pôle négatif communiquait avec la terre.

La position de l'aiguille a d'abord été observée quand les quatre boules étaient réunies entre elles et avec le sol, l'aiguille mobile se trouvant, sans qu'il y eût torsion du fil, écartée d'un certain angle du diamètre passant par les deux boules fixes. La position d'équilibre de l'aiguille a ensuite été observée après sa déviation.

Appelons :

q la charge de chacune des boules mobiles;
q' la charge de chacune des boules fixes;

d la distance d'une boule fixe à la boule mobile voisine;
α leur écart angulaire;
t la torsion.

On a

$$\frac{2qq'}{d^2}\cos\frac{\alpha}{2}=n_1 t.$$

Le rayon des boules fixes était de $9^{mm},75$.
Celui des boules mobiles était de $7^{mm},75$.

$$q'=q\,\frac{9,75}{7,75}=q\,1,26,$$
$$d=48^{mm};$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=0,96.$$
$$\frac{2q^2 1,26\times 0,96}{2304}=n_1 t.$$

On a fixé la valeur de n_1 en comptant d'abord les oscillations de l'aiguille oscillant seule, puis en comptant les oscillations de l'aiguille supportant deux poids égaux placés à des distances égales du centre de mouvement.

Le moment n_1 du couple nécessaire pour tordre le fil d'un arc égal au rayon était

$$n_1=3313273.$$

La déviation de l'aiguille qui soutenait les deux boules mobiles était exprimée par 60 millimètres de la règle divisée. Celle-ci se trouvait à 3 mètres du miroir :

$$t=\frac{\frac{60}{2}}{3000}=\frac{1}{100},$$
$$nt=33132,73.$$

En faisant le calcul de q, on trouve

$$q=5616,5,\quad \frac{q}{200}=28,08.$$

Le potentiel est

$$\frac{28,08}{7,75}=3,62.$$

Si le pôle négatif de la pile précédente est relié au sol, la quantité d'électricité qui se trouvera sur une sphère de rayon R mise en communication avec le pôle positif sera $R \times 3{,}62$; cette quantité est exprimée en unités d'électricité. On peut, en employant une disposition simple, charger ainsi la sphère et la décharger plusieurs fois de suite, en faisant en même temps passer dans le fil d'un galvanomètre le courant produit par la décharge. En désignant par n le nombre de décharges opérées dans l'unité du temps, la quantité d'électricité qui traversera le fil du galvanomètre sera $nR \times 3{,}62$. On passe facilement de là à la mesure de la quantité d'électricité transportée dans l'unité de temps dans le circuit d'une pile produisant un courant d'intensité connue ou dissolvant un poids de zinc déterminé.

MESURES FAITES AVEC L'ÉLECTROMÈTRE A MIROIR.

1° *Son mode d'emploi.* — Pour faire usage de l'électromètre, on peut opérer de la façon suivante : les quatre secteurs sont réunis, et l'aiguille occupe une position d'équilibre dont nous n'aurons pas, du reste, à tenir compte.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de mesurer la différence des états électriques aux deux pôles d'un élément de pile. Mettons le pôle positif en communication, par un long fil métallique, avec deux secteurs en diagonale. Soit S leur ensemble; le pôle négatif est relié au système des deux autres secteurs S'; l'aiguille est déviée et oscille autour d'une nouvelle position d'équilibre que fixent trois mesures convenablement associées.

Ainsi, avec un élément Daniell, on a lu :

Écart maximum à droite....	$\alpha = 278{,}0$ mm	539,2 mm	$\dfrac{\alpha + 2\beta + \gamma}{4} = 268^{\text{mm}}{,}85 = A.$
Écart à gauche au retour de l'aiguille....	$\beta = 261{,}2$		
	$\beta = 261{,}2$	536,2	
Deuxième écart à droite...	$\gamma = 275{,}0$		
	275,0	53,83	
Deuxième écart à gauche......	263,3		
	263,3	365,8	
Troisième écart à droite.......	273,5		

Les deux sommes 539,2 et 536,2 donnent pour moyenne 537,7. La position d'équilibre est $\frac{537,7}{2}$ ou 268,85. Des deux sommes 536,2 et 538,3 on déduit de même 268,62 et enfin 538,3 et 536,8 conduisent à 268,77. Les trois nombres 268,85, 268,62 et 268,77 sont très-voisins : c'est une preuve de la régularité des oscillations autour de la position d'équilibre.

Renversons les communications de manière à relier le pôle positif au système S' et le pôle négatif au système S. L'aiguille est déviée de l'autre côté de la position d'équilibre qu'elle occupait quand les quatre secteurs étaient réunis entre eux.

$$\text{Nouvelles lectures....}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\alpha'=285\\ \beta'=310\end{array}\right\}595\\ \left.\begin{array}{l}\beta'=310\\ \gamma'=299\end{array}\right\}599\end{array}\right\}\frac{\alpha'+2\beta'+\gamma'}{4}=298,5=\mathrm{A}';$$

298,5 est la position d'équilibre que l'aiguille occuperait dans le second cas.

Il est bon de faire une troisième observation en rétablissant les communications comme dans le premier cas. On corrige ainsi l'influence de la variation de la position d'équilibre initiale :

$$\text{Lectures............}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\alpha''=259\\ \beta''=278\end{array}\right\}587\\ \left.\begin{array}{l}\beta''=278\\ \gamma''=261\end{array}\right\}539\end{array}\right\}\frac{\alpha''+2\beta''+\gamma''}{4}=269=\mathrm{A}''.$$

On prendra pour résultat

$$\mathrm{A}'-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{A}''}{2}=298,5-\frac{268,85+269}{2}.$$

Lorsque l'aiguille d'aluminium est faiblement chargée, la position d'équilibre, correspondant au cas où les quatre secteurs sont réunis, éprouve peu de changement. Si la charge est considérable, les variations peuvent être plus fortes, mais elles n'influent pas sur la différence observée. Un jour où ces déplacements ont été notables, la différence aux deux pôles d'un élément constant a été représentée d'abord par

$$287,42-258,78=28,64,$$

et, une heure après, par

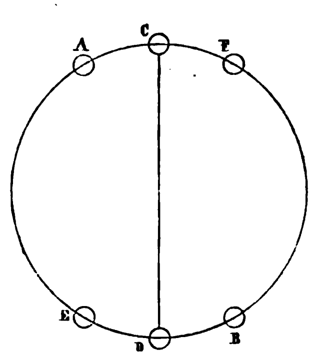
$$294,75 - 265,99 = 28,76.$$

En soutenant la plaque mobile par un fil de torsion assez fin, et cette plaque se trouvant à une distance des secteurs égale à 1 millimètre, la charge de 20 éléments zinc, cuivre et eau suffisait pour que la différence entre les états électriques des deux pôles d'un couple de Daniell fût accusée par 25 divisions.

2° *Les indications de l'électromètre sont proportionnelles à celles de la balance de Coulomb.* — Pour établir cette concordance, il a été nécessaire d'augmenter la sensibilité de la balance et de diminuer beaucoup celle de l'électromètre. A cet effet, la disposition adoptée déjà par Hankel pour la balance a été choisie (*fig.* 5). Quatre boules fixes agissaient sur deux boules mobiles fixées à l'extrémité d'une aiguille que soutenait un fil de cuivre recuit de $\frac{1}{10}$ de millimètre de diamètre. Les boules étaient supportées par des tiges de verre, et des fils fins de cuivre permettaient de les mettre en relation avec l'extérieur.

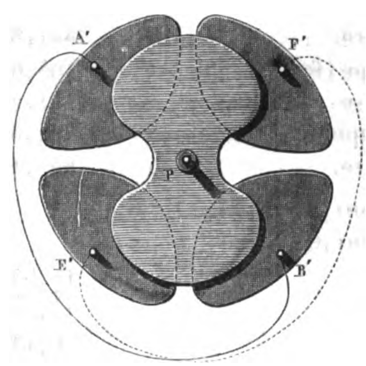
Quant à l'électromètre (*fig.* 6), la distance de la plaque aux secteurs était de 6 millimètres, et le fil de torsion était un fil de cuivre recuit de $\frac{1}{6}$ de millimètre de diamètre.

Fig. 5.



	c
Diamètre des boules fixes A, E, B, F.	2,0
Diamètre des boules mobiles C et D.	1,5
Corde EB..........................	10,0
Corde FB..........................	15,0

Fig. 6.



A et B, A' et B' sont reliés à la terre.
E et F, C et D, ainsi que E' et F' et la plaque P, communiquent avec le pôle positif d'un groupe d'éléments.

Trois groupes d'éléments zinc, cuivre et eau ont été formés, le premier de 100 éléments, le deuxième de 80 et le troisième de 60. Le pôle négatif communiquait avec la terre, et le pôle positif avec quatre des boules dans la balance, et avec deux des secteurs et la plaque dans l'électromètre. La légende placée au-dessous de la figure achèvera de faire comprendre comment étaient disposées les communications.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Balance.		*Électromètre.*	
Équilibre (¹)	201,8	Équilibre (²)	257,0
1ᵉʳ groupe (100 éléments)	184,5	1ᵉʳ groupe (100 éléments)	268,0
Équilibre	202,2	Équilibre	257,2
3ᵉ groupe (60 éléments)	195,9	3ᵉ groupe (60 éléments)	261,0
Équilibre	202,2	Équilibre	256,9
202,0 — 184,5 = 17,50		268 — 257,10 = 10,90	
202,2 — 195,9 = 6,30		261 — 257,05 = 3,95	

Les quotients $\frac{17,5}{10,9} = 1,60$ et $\frac{6,30}{3,95} = 1,59$ sont suffisamment d'accord.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

(La sensibilité de l'électromètre a été augmentée en prenant pour fil de torsion un fil de cuivre de $\frac{1}{10}$ de millimètre.)

Balance.		*Électromètre.*	
Équilibre	201,8	Équilibre	423,5
3ᵉ groupe (60 éléments)	195,6	3ᵉ groupe (60 éléments)	429,0
Équilibre	201,7	Équilibre	423,7
1ᵉʳ groupe (100 éléments)	184,3	1ᵉʳ groupe (100 éléments)	439,6
Équilibre	202,2	Équilibre	424,0
201,75 — 195,6 = 6,15		429,0 — 423,60 = 5,40	
201,95 — 184,3 = 17,65		439,6 — 423,85 = 15,75	

$$\frac{17,65}{15,75} = 1,12.$$

$$\frac{6,15}{5,4} = 1,138.$$

(¹) Toutes les boules communiquent ensemble et avec la terre.

(²) Les quatre secteurs communiquent ensemble.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

(Le fil de torsion restant le même, la distance de la plaque mobile aux secteurs est portée de 6 à 3 millimètres.)

Balance.		*Électromètre.*	
Équilibre	195,90	Équilibre	390,00
2ᵉ groupe (80 éléments)	182,80	2ᵉ groupe (80 éléments)	412,25
Équilibre	195,30	Équilibre	390,05
1ᵉʳ groupe (100 éléments)	175,15	1ᵉʳ groupe (100 éléments)	425,00

$$195,6 - 182,80 = 12,80 \qquad 412,25 - 390,02 = 22,22$$
$$195,3 - 175,15 = 20,15 \qquad 425,00 - 390,05 = 34,95$$

$$\frac{12,8}{22,22} = 0,574.$$

$$\frac{20,15}{34,95} = 0,576.$$

Si l'on emploie un plus grand nombre d'éléments, 200 par exemple, il faut tenir compte, avec la balance, du changement de distance des boules mobiles aux boules fixes; avec l'électromètre, au contraire, la déviation peut varier beaucoup plus sans que la position de la plaque relativement aux secteurs change sensiblement.

On voit, d'après les expériences qui précèdent, que les indications de l'électromètre sont, comme celles de la balance, proportionnelles aux différences de potentiel.

3° *La déviation est proportionnelle à la charge de la plaque et au nombre des éléments mis en relation avec les secteurs.* — Prenons 4 éléments de Daniell disposés en série.

La charge de l'aiguille étant produite par 100 éléments,

La différence aux deux pôles du premier Daniell a été	146,50
» aux deux pôles du second	142,75
» aux deux pôles de l'ensemble des 2 éléments.	291,00

au lieu de 289,25, qui représente la somme.

La charge de l'aiguille étant celle de 60 éléments,

Le premier Daniell a donné	87,75		
Le deuxième et le troisième réunis	180,50		
Les trois	269,00		

au lieu de 268,85, qui fait la somme.

Le premier et le deuxième	179,50		
Le troisième et le quatrième	189,50		
Les quatre réunis	370,75	au lieu de	369,00.

Si deux éléments se suivent et que leurs pôles de même nom soient en communication, les potentiels se retranchent :

Élément Daniell	109,75		
Élément Grove	202,50		
Élément Grove suivi du Daniell	92,25	au lieu de	92,75.

L'examen des nombres précédents fait voir que la déviation produite par un même élément est très-sensiblement proportionnelle à la charge de l'aiguille, car le même élément a donné 146,5 quand la charge était produite par 100 éléments, et 87,75 quand elle provenait de 60 éléments. La proportionnalité rigoureuse exigerait 87,90.

DÉTERMINATION DES FORCES ÉLECTROMOTRICES.

La différence de potentiel aux deux pôles d'un élément de pile est en relation avec la grandeur des effets que peut exercer le courant produit quand le circuit est fermé. Cette dépendance fut signalée dès l'invention de la pile, mais sans être soumise à une loi précise. On sait maintenant que, si l'on prend deux éléments auxquels on offre la même résistance à vaincre, les quantités d'eau décomposées ou les actions exercées sur l'aiguille aimantée sont exactement proportionnelles aux différences de potentiel des deux pôles quand le circuit est ouvert.

Kohlrausch a démontré ce fait avec plusieurs éléments constants pour lesquels il a déterminé la différence de potentiel aux deux pôles et les forces électromotrices, c'est-à-dire les intensités correspondant à une même résistance. Il a trouvé que les charges données à son électromètre condensateur étaient proportionnelles aux forces électromotrices.

Mesures de la force électromotrice de plusieurs éléments constants. — Les mesures se font plus simplement avec l'électromètre à miroir. Cet instrument a servi à déterminer les nombres suivants, relatifs à quelques éléments à deux liquides. Plusieurs mesures ont été effectuées à deux époques différentes :

Première série de mesures.

Élément Daniell (zinc amalgamé, cuivre, sulfates)	1,00
Élément Grove (acide sulfurique $\frac{1}{10}$, acide azotique pur)	1,77
Élément Bunsen (charbon, zinc amalgamé)	1,73
Élément Marié-Davy	1,47
Élément cadmium et zinc amalgamé (sulfates)	0,33
Élément cadmium et zinc amalgamé (chlorures)	0,25
Amalgame de sodium, charbon, sulfate de mercure et charbon	2,23

Deuxième série de mesures.

Daniell à sulfates	1,00
Daniell (acide sulfurique $\frac{1}{10}$ et sulfate de cuivre)	1,06
Grove (acide sulfurique $\frac{1}{10}$, acide nitrique pur)	1,80
Grove (acide nitrique fumant)	1,97

Les lois relatives aux forces électromotrices trouvées par les différents expérimentateurs se vérifient sans difficulté.

Influence des dimensions de l'élément. — La force électromotrice est indépendante des dimensions de l'élément.

Deux éléments Daniell ont été préparés : pour l'un, le diamètre était de 10 centimètres et la hauteur des liquides de 13 centimètres; la différence des potentiels aux deux pôles a été 105,4; on a trouvé 105,75 avec un second élément dont le diamètre était de 5 centimètres et la hauteur 4 centimètres.

En général, un pareil accord ne peut exister entre les forces électromotrices de deux éléments Daniell que s'ils ont été montés tous deux depuis peu de temps. Il est indifférent de faire la mesure avant d'avoir fermé le circuit ou après avoir fait fonctionner l'élément pendant quelques instants et ensuite séparé les pôles; mais il arrive bientôt que le sulfate de cuivre traverse le vase poreux, et, le zinc se recouvrant peu

à peu d'un dépôt de cuivre, la force électromotrice de l'élément décroît sans que le circuit soit fermé.

Relation entre les forces électromotrices. Il y a une relation entre les forces électromotrices qui donne un moyen de s'assurer, dans le cours des déterminations, de la marche régulière de l'instrument de mesure.

Si nous prenons 3 éléments à eau acidulée formés avec du zinc et du cuivre, du zinc et du fer, du fer et du cuivre, nous trouvons que l'une des forces électromotrices est égale à la somme des deux autres :

Cuivre-fer, eau acidulée par $\frac{1}{21}$ d'acide sulfurique........	29,5
Fer-cuivre...	36,12
Zinc-cuivre...	65,4

La somme calculée est 65,62.

Cette relation se conserve lorsque les liquides ont attaqué les surfaces ; la force électromotrice de chaque élément se modifie, mais les variations dans chacun d'eux sont pour ainsi dire complémentaires. En voici un exemple :

Élément Daniell, force électromotrice......	99,47	
Élément fer-cuivre, eau acidulée, acide sulfurique $\frac{4}{5}$..................	35	
» fer-zinc......................	55	
» zinc-cuivre....................	92	au lieu de $35 + 55 = 90$.

Les éléments sont laissés dans le même état pendant un quart d'heure. On trouve alors :

Élément fer-cuivre...........	25	
» fer-zinc.............	70	
» zinc-cuivre..........	94	au lieu de $25 + 70 = 95$.
Élément Daniell.............	100,12	

La relation dont nous parlons ne peut donc pas garantir la valeur de chaque force électromotrice : elle ne fait que prouver la rigueur des mesures.

On sait que les éléments à deux liquides présentent une loi analogue.

Nous avons choisi les trois éléments suivants :

Cadmium-sulfate de cadmium; cuivre-sulfate de cuivre.........	138,37
Zinc amalgamé-sulfate de zinc; cadmium-sulfate de cadmium...	67,5
Zinc amalgamé-sulfate de zinc; cuivre-sulfate de cuivre.......	204,4

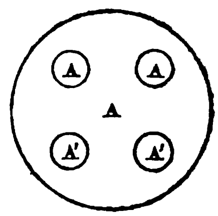
La somme calculée était 205,42.

Loi de Péclet relative aux liquides. — D'après Volta, les charges respectives de deux plaques de zinc et de cuivre, par exemple, sont les mêmes lorsque ces deux métaux sont en contact immédiat ou lorsqu'ils sont séparés par un ou plusieurs métaux. Péclet a indiqué pour les liquides une loi analogue. Mettons une lame de platine dans un vase poreux contenant de l'acide sulfurique étendu, une lame de zinc dans un second vase poreux renfermant le même mélange d'acide sulfurique et d'eau; plaçons les deux vases poreux dans un autre liquide; on observe que la nature du liquide extérieur est indifférente. Ainsi, ce liquide étant de l'acide sulfurique, la différence entre le zinc et le platine a été trouvée égale à 215 et l'on a eu 212 en remplaçant l'acide sulfurique par l'acide nitrique.

La loi de Péclet se vérifie dans des cas plus compliqués. Je citerai à ce sujet une expérience qui montre en même temps comment se distribuent les différences de potentiel lorsque plusieurs métaux et plusieurs liquides se trouvent en présence.

Dans un vase de verre (*fig.* 7) contenant de l'acide sulfurique étendu d'eau, on place quatre vases poreux dont deux renferment le même

Fig. 7.



mélange et les deux autres de l'acide nitrique étendu. Deux lames de zinc amalgamé se trouvent, l'une dans l'acide sulfurique, l'autre dans l'acide

nitrique; deux fils de platine sont également plongés l'un dans l'acide sulfurique, l'autre dans l'acide nitrique.

Différence entre le zinc et le platine plongés tous deux dans l'acide sulfurique A......	$Z \mid A - P \mid A = 218,75$
Entre le zinc plongé dans l'acide azotique A' et le platine dans l'acide sulfurique A....	$Z \mid A' + A \mid A' - P \mid A = 208,25$
Entre le zinc dans A et le platine dans A'....	$Z \mid A - A \mid A' - P \mid A' = 269,5$
Entre le zinc et le platine, tous les deux dans A'..............................	$Z \mid A' - P \mid A' = 257,5$
Entre le platine dans A et le platine dans A'...	$P \mid A - A \mid A' - P \mid A' = 50,6$

Le nombre 50,6 est susceptible de vérification. En effet, on obtient par soustraction :

$$P \mid A - A \mid A' - P \mid A' = 49,25 \quad \text{et} \quad P \mid A - AA' - P \mid A' = 50,75.$$

Éléments à un seul liquide. Influence de la nature du liquide. — La détermination des forces électromotrices par l'évaluation de la différence du potentiel est avantageuse dans le cas des éléments à un seul liquide, car la polarisation n'est plus à craindre puisque l'élément reste ouvert.

La facilité des mesures permet de plus de suivre les variations de la force électromotrice quand on modifie la nature de l'élément.

L'influence de la nature du liquide et celle de la nature des électrodes ont été examinées dans des cas particuliers.

La nature du liquide modifie la force électromotrice, qui peut d'ailleurs être considérable sans que le métal paraisse attaqué. C'est ainsi que la différence de potentiel pour l'élément zinc et cuivre est un peu plus forte avec l'eau distillée ou avec la glycérine qu'avec l'eau acidulée.

Dans le cas où le liquide est de l'acide sulfurique étendu, la concentration a peu d'influence sur la force électromotrice. Le tableau suivant résume des expériences faites à ce sujet. La proportion d'acide était comprise entre $\frac{1}{50}$ et $\frac{1}{5}$ du volume total. Les essais tentés pour concentrer davantage la solution n'ont pas conduit à des résultats constants.

Le nombre 100 représente la force électromotrice d'un élément Daniell.

	Acide $\frac{1}{15}$.	Acide $\frac{1}{11,3}$.	Acide $\frac{1}{25}$.	Acide $\frac{1}{10}$.	Acide $\frac{1}{5}$.
Zinc-platine.......	137,9	133,9	133,8	131	131,4
Zinc-argent..........	110,8	112,3	111,7	108,8	107
Argent-platine........	27,5	26,4	23,3	25,5	24,8
Zinc-cuivre...........	91,1		87	87,2	
Aluminium-platine....	104,3	105,9	103,7	102,8	95,8
Fer-platine...........	91,1	89,1	88,3	83,3	79

Avec les solutions de potasse, le degré de concentration modifie plus profondément la force électromotrice.

On a étudié trois solutions contenant, avec 450 centimètres cubes d'eau distillée, la première 2 grammes de potasse, la seconde $11^{gr},77$ et la troisième 329 grammes.

Un élément zinc amalgamé-cuivre, eau acidulée $\frac{1}{25}$, a servi de terme de comparaison.

Zinc amalgamé cuivre et eau acidulée.	Solutions employées.	Zinc-cuivre.	Zinc-fer.	Fer-cuivre.
76,25	Première solution....	21,25	30	8,2
75,53	Deuxième solution...	78	77,75	négligeable
75	Troisième solution...	78,25	84,85	7,5
75,5	Troisième solution...	77	77	0,55

On voit que la troisième solution a donné des nombres variables. Davy avait trouvé que le fer est plus attaqué que le cuivre par la solution de potasse et Faraday a annoncé le contraire.

Les contradictions de ce genre ne sont pas rares dans les mesures de forces électromotrices publiées par divers expérimentateurs. J'ai rencontré souvent des résultats très-différents en opérant dans des conditions en apparence identiques. Ces irrégularités peuvent tenir, dans certains cas, à des modifications dans l'état de la surface des métaux. Ainsi, en laissant pendant plusieurs heures deux lames isolées l'une de l'autre, l'une de fer, l'autre de cuivre, dans un vase contenant du bisulfate de potasse, la lame de fer se recouvre d'une couche très-mince de cuivre, le circuit étant ouvert. On s'explique alors pourquoi les résultats sont plus constants, quand le mélange des sels qui se forment autour des deux métaux est rendu moins facile par l'interposition d'une cloison poreuse.

Influence de la nature des électrodes. — Des changements peu considérables dans la nature des électrodes peuvent quelquefois amener de grandes variations dans la force électromotrice. Ceci a lieu, en particulier, en substituant, dans un élément contenant de l'eau acidulée au $\frac{1}{15}$ par l'acide sulfurique, à du charbon de cornue ordinaire le même charbon purifié. Il avait été traité par le chlore au rouge, lavé et enfin chauffé de nouveau au rouge dans un creuset.

Charbon non purifié-cuivre........	27,05
Charbon non purifié-fer...........	56,03
Fer-cuivre........................	28,7
Charbon purifié-cuivre............	35,8
Charbon purifié-fer...............	66
Fer-cuivre........................	29,1

Toutefois ces modifications ne se présentent pas avec tous les liquides; la force électromotrice d'un Bunsen reste la même, que le charbon employé soit ou ne soit pas purifié.

Divers alliages de zinc et de cuivre ont été choisis et les forces électromotrices ont été mesurées pour des éléments formés en les associant successivement à du zinc et à du cuivre; l'eau acidulée renfermait $\frac{1}{10}$ d'acide sulfurique.

PREMIER ALLIAGE. — *Laiton.*

Laiton et cuivre........	Force électromotrice inappréciable.
Laiton et zinc, Cuivre et zinc	Même force électromotrice.

DEUXIÈME ALLIAGE. — 50 *de zinc en poids et* 50 *de cuivre.*

Alliage et cuivre........	5,1
Zinc et cuivre...........	98

TROISIÈME ALLIAGE. — 80 *de zinc,* 20 *de cuivre.*

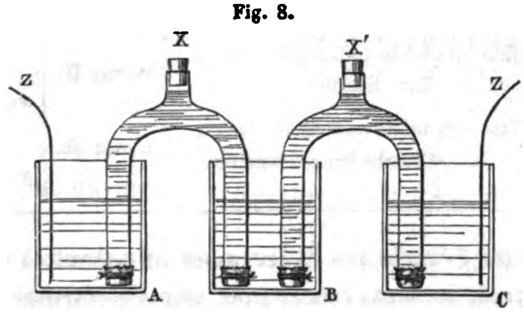
Alliage et cuivre........	60,84
Zinc et cuivre..........	97,7

L'influence du zinc est insignifiante quand sa proportion n'atteint pas 50 pour 100. Si elle dépasse 70 pour 100, les nombres diffèrent avec les échantillons, et il n'a pas été possible de déterminer exactement la loi à laquelle est soumise la variation de la force électromotrice.

Forces électromotrices au contact de deux liquides. — On n'est arrivé jusqu'ici par aucune méthode à déterminer la force électromotrice développée au contact de deux liquides. Les mesures faites par M. Becquerel en séparant les deux liquides par un vase poreux et en plongeant une lame de platine dans chacun des liquides ne donnent que la somme algébrique de trois forces électromotrices.

Les nombreuses déterminations de du Bois-Reymond et de Worm-Muller, effectuées à l'aide d'un élément complexe constitué comme celui que représente la *fig.* 8, ne conduisent également qu'à la somme de

Fig. 8.



trois forces électromotrices. Cette somme elle-même ne me semble pas avoir été déterminée avec certitude.

En répétant avec l'électromètre plusieurs de leurs observations, j'ai obtenu des nombres qui diffèrent notablement de ceux qui sont inscrits dans leurs Mémoires.

D représente la force électromotrice de l'élément Daniell.

PARTIES EXTRÊMES DE L'ÉLÉMENT.	LIQUIDES INTERMÉDIAIRES.	RÉSULTAT.	
Zinc amalgamé-eau distillée (dans le vase A et dans le vase C)............	Acide sulf. concentré (dans le tube X et le vase B). Pot. conc. (dans le tube X')...	0,1 D.	0,48 D. D'après Worm-Muller.
Zinc amalgamé-eau distillée..................	Acide nitrique fumant.... Potasse concentrée.......	0,11 D.	0,31 D. D'après du Bois-Reymond.
Zinc amalgamé-sulfate de zinc................	Acide nitrique pur....... Eau distillée............	0,026 D.	0,167 D. D'après du Bois-Reymond.
Zinc amalgamé-sulfate de zinc.................	Acide sulfurique pur..... Eau distillée............	0,022 D.	0,175 D. D'après du Bois-Reymond.
Zinc amalgamé-sulfate de zinc.................	Acide sulfurique pur..... Chlorhydrate d'ammon....	0,042 D.	0,22 à 0,21 D'après du Bois-Reymond.

Avant de quitter l'étude des différences de potentiel aux deux pôles d'un circuit ouvert, je ferai remarquer que l'électromètre permet d'évaluer les forces électromotrices des machines magnéto-électriques ou celles qui se développent aux extrémités d'une bobine induite, soit par l'ouverture, soit par la fermeture du circuit inducteur.

III. — *Phénomènes électrostatiques dans un circuit fermé.*

Expérience de Volta. — Nous allons nous occuper des phénomènes électrostatiques qui s'observent dans un circuit fermé. La première expérience faite sur ce sujet est due à Volta : « Il joignit les pôles de la pile (Biot, *Physique*, 1816) par un conducteur assez imparfait pour qu'il pût s'établir des différences de charges observables entre ses diverses parties. Par exemple, on atteint parfaitement ce but en se servant d'une longue bande de papier imbibée d'eau pure. Après que la communication a été ainsi établie pendant quelques instants entre les deux pôles, si l'on touche successivement différentes parties de la bandelette avec un électroscope à condensateur, afin d'éprouver son état électrique, on trouve que, lorsque la pile est isolée, chaque moitié est

chargée de l'espèce d'électricité qui est propre au pôle auquel elle adhère; l'une est vitrée, l'autre résineuse, et l'intensité de ces charges va en diminuant depuis chaque pôle jusqu'au milieu de la bandelette qui se trouve dans l'état neutre, du moins en supposant la conductibilité constante sur toute sa longueur; car si l'on rend l'écoulement de l'électricité plus facile sur l'une des deux moitiés que sur l'autre, comme on peut le faire en y versant quelques gouttes d'une dissolution saline plus conductrice que l'eau pure, les charges électriques de cette moitié deviennent plus fortes à égale distance et le point neutre se rapproche du pôle opposé. Lorsque la pile, au lieu d'être isolée, communique au sol par un de ses pôles, le point neutre passe à ce pôle même et tout le reste de la bandelette offre, avec une intensité de charge progressivement croissante, la seule espèce d'électricité qui appartient au pôle opposé. »

Haüy fait remarquer, dans sa *Physique*, que cet effet peut encore avoir lieu, proportion gardée, par rapport à des substances beaucoup plus susceptibles que le papier et l'eau de transmettre les deux fluides.

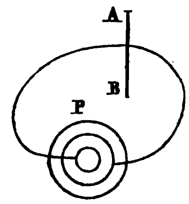
Ohm répéta les mêmes expériences avec des fils métalliques très-longs, mais c'est à Kohlrausch que l'on doit les premières mesures précises. Il employa, comme on sait, l'électromètre de Dellmann et un condensateur à lame d'air.

Variations du potentiel dans le circuit interpolaire. — Si nous considérons deux conducteurs isolés, chargés d'électricité statique et ayant un potentiel différent, un courant électrique s'établit dans le fil qui sert à les mettre en communication. C'est ainsi qu'un courant se produit quand on réunit le collecteur et le condensateur d'une bouteille de Leyde. On a été amené par analogie à regarder le courant dans le circuit d'une pile comme résultant de la différence de potentiel qui existe entre les deux pôles, et l'on assimile chacune des parties du circuit interpolaire à un conducteur chargé d'électricité statique et ayant un potentiel déterminé et différent de celui de la partie voisine. Cette différence se maintient constante quand le courant lui-même est constant.

Si l'on pouvait construire une balance de torsion assez sensible pour étudier à l'aide du plan d'épreuve la densité électrique aux différents points d'un disque métallique AB faisant partie d'un circuit (*fig.* 9), on

trouverait probablement une densité plus forte au bord qu'au centre. Au contraire, en réunissant à l'électromètre, par un long fil, soit le bord, soit le centre du disque, le résultat obtenu est toujours le même.

Fig. 9.



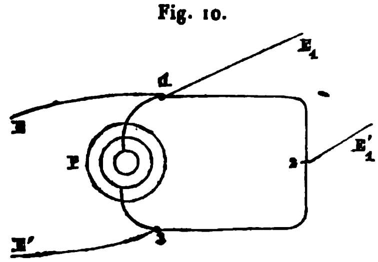
Étant donné un fil métallique homogène faisant partie du circuit d'une pile, si l'on met un des points, par exemple l'extrémité qui touche le pôle négatif, en communication avec le sol, les potentiels à partir de ce point croissent proportionnellement à la distance à l'extrémité.

Dans un conducteur liquide de petites dimensions transversales, les différences de potentiel entre deux tranches sont également proportionnelles à leur intervalle.

Plus généralement, dans un même circuit, la différence de potentiel entre deux points est proportionnelle à la résistance intermédiaire.

Vérification des lois de Ohm. — Avant de vérifier les lois de Ohm au moyen de l'électromètre, il est utile de montrer que l'emploi de cet instrument ne modifie en rien l'état électrique du circuit. Une pile P ayant été disposée (*fig.* 10), les deux pôles furent réunis par un fil

Fig. 10.



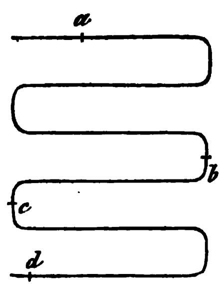
métallique; les points 1 et 3 pouvaient communiquer avec les deux couples de secteurs d'un premier électromètre, les points 1 et 2 avec les deux couples de secteurs d'un second électromètre.

La déviation obtenue avec l'appareil EE' était sensiblement la même quand on faisait fonctionner en même temps $E_1E'_1$ ou quand on laissait les points 1 et 2 libres de toute communication étrangère. On avait 47,1 dans le premier cas et 47,4 dans le second. En observant la déviation de la plaque de l'un des électromètres, celui qui communiquait avec 1 et 2, on trouvait le même nombre pour la position d'équilibre, quand cette plaque oscillait seule ou quand elle marchait en même temps que celle de l'autre instrument.

Ces expériences ont été répétées en augmentant la sensibilité des deux électromètres, et les très-petites différences de sens variables qu'on a remarquées devaient être attribuées aux erreurs d'observations.

Ceci établi, un fil de cuivre traversé par un courant ayant été tendu sur un cadre (*fig.* 11), on a mis un point *a* de ce fil en communication

Fig. 11.



avec l'un des systèmes de secteurs de l'électromètre. Les points *b*, *c*, *d* furent successivement reliés à l'autre système de secteurs.

Différence observée	de *a* à *d*,	$a\,\vert\,d$ ...	261,68,	longueur	$ad = 369,7$
»	de *a* à *c*,	$a\,\vert\,c$....	154,20,	»	$ac = 132,7$
»	de *a* à *b*,	$a\,\vert\,b$....	94	»	$ab = 218,9$
»	de *a* à *d*,	$a\,\vert\,d$....	259,45,		

$$\frac{a\,|\,d}{a\,|\,c} = \frac{260,94}{154,20} = 1,694, \quad \text{Rapport des longueurs } \frac{ad}{ac} = 1,689,$$

$$\frac{a\,|\,d}{a\,|\,b} = \frac{260,19}{94} = 2,768, \quad \text{Rapport des longueurs } \frac{ad}{ab} = 2,786.$$

Si un corps conducteur isolé est mis en communication avec le

point *a*, il prend le même état électrique que le point *a*, et le résultat obtenu pour la différence $a|d$ ne change pas quand on met en communication avec l'un des systèmes de secteurs de l'électromètre, soit le point *a* lui-même, soit une partie quelconque du conducteur adjoint.

On a pris ensuite trois fils de laiton de même longueur (320 centimètres), et on les a placés dans le circuit, le premier seul et suivi des deux autres fixés l'un à côté de l'autre, le second conducteur offrant par conséquent une section double de celle du premier.

Différence observée aux deux extrémités { du premier fil........ 80,9
du second conducteur. 40,61

Enfin un fil de cuivre et un fil de fer ont été intercalés dans un même circuit.

Nombres trouvés aux deux extrémités { du fil de cuivre... 113,65
du fil de fer...... 255,73

Le rapport $\frac{255,73}{113,65}$ est 2,24; or le rapport des résistances déterminé par la méthode du pont de Wheatstone a été trouvé égal à 2,22.

Mesure des résistances. — La détermination des différences de potentiel permet donc d'étudier le rapport des résistances de deux fils et des diverses parties d'un même fil. Il est également facile d'obtenir le rapport de résistances considérables ou de résistances faibles. Pour avoir une sensibilité suffisante dans le cas de faibles résistances, on augmentera les dimensions et la conductibilité de la pile produisant le courant. Nous en verrons plus loin la raison.

S'il s'agit de solutions métalliques, comme le sulfate de zinc ou le sulfate de cuivre, on les verse dans des auges prismatiques, et l'on prend, pour amener le courant, des plaques de même métal que celui du sel.

Deux auges de même longueur ($38^c,5$) et de même largeur (4 centimètres) se suivaient dans le même circuit; l'une des auges renfermait 500 centimètres cubes d'une solution saturée de sulfate de cuivre, et l'autre 1000 centimètres cubes de la même solution.

On a trouvé aux deux extrémités { de la première auge... 90,94
de la seconde........ 45,38

Les électrodes étaient des plaques de cuivre de même section que les auges. Des bobines, placées en même temps dans le circuit, permettaient d'obtenir dans chaque cas la résistance de la colonne de sulfate de cuivre en mètres du fil pris pour terme de comparaison.

Si l'on plonge dans une même auge contenant une dissolution de sulfate de cuivre des plaques du même métal, les différences obtenues entre deux plaques sont proportionnelles à la distance qui les sépare, et il est indifférent que les plaques plongent peu ou beaucoup. Les plaques peuvent également être remplacées par des fils.

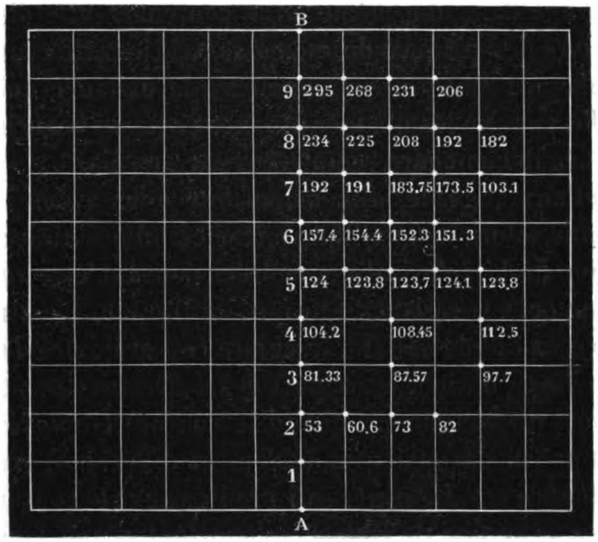
En donnant aux auges les dimensions que nous avons indiquées, la résistance d'une solution métallique même étendue s'obtient sans qu'on ait à s'occuper de la polarisation, celle-ci pouvant être rendue négligeable par rapport à la résistance propre du liquide. C'est ainsi qu'avec une solution étendue de sulfate de cuivre (28 grammes de sulfate pur et sec dans 2 litres d'eau), le rapport des différences de potentiel était égal au rapport des longueurs, quand le courant employé était faible, et les deux rapports devenaient notablement différents, quand on augmentait le nombre des éléments qui produisaient le courant. Les solutions étendues de sulfate de zinc se comportent d'une façon analogue quand on fait varier l'intensité du courant qui les traverse. Avec un fort courant, l'influence de la polarisation apparait, même quand les électrodes sont des plaques de zinc amalgamé.

Dans la recherche des résistances relatives aux liquides peu conducteurs il faut prendre pour électrodes des plaques ayant la largeur de l'auge et non des fils. En effet, si le courant est amené par des fils, les lignes d'égal potentiel, au lieu d'être des droites perpendiculaires à la grande dimension de l'auge, deviennent des courbes qui s'infléchissent de plus en plus vers les pôles.

Une auge en verre de forme carrée (*fig.* 12), ayant 40 centimètres de côté, renfermait de l'eau distillée jusqu'à une hauteur de 1 centimètre environ; le courant, de trois éléments Daniell, traversait le liquide. Les électrodes étaient deux fils de cuivre A et B; deux autres fils plongeaient dans le liquide et communiquaient avec les deux systèmes de secteurs de l'électromètre; l'un de ces fils occupait une position voisine de A, marquée 1 sur la figure; l'autre pouvait se déplacer, et sa position se repérait au moyen d'un papier quadrillé collé sur le fond de l'auge. Les

nombres inscrits sur la figure représentent les différences de potentiel entre le fil voisin de A et le fil mobile. On peut tracer ainsi les lignes

Fig. 12.



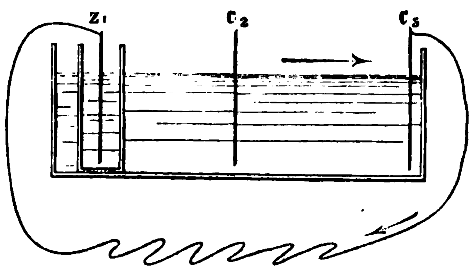
d'égal potentiel. La ligne du milieu est une ligne droite. La chute entre deux points distants de 1 centimètre, par exemple, et situés sur une parallèle à AB est d'autant plus forte que l'on se rapproche davantage de l'une des électrodes.

Distribution dans le circuit des différences de potentiel. — Kohlrausch a montré que, dans le circuit complexe formé par l'élément et les fils métalliques qui relient les deux pôles, les différences de potentiel mesurées entre deux points sont proportionnelles à la résistance intermédiaire, et que, de plus, la somme des différences est égale à la différence obtenue aux deux pôles de l'élément ouvert.

Pour répéter l'expérience sous cette forme, j'ai pris une auge prismatique (*fig.* 13), contenant une solution saturée de sulfate de cuivre et un vase poreux où une lame de zinc plongeait dans du sulfate de zinc. L'élément ainsi constitué avait son circuit fermé par un fil de cuivre fin tendu sur un cadre.

La résistance de la colonne de sulfate de cuivre a été comparée à celle du fil métallique, en employant un élément constant auxiliaire et une

Fig. 13.



boussole des tangentes. Enfin la résistance de l'élément de pile entier a été comparée à celle du fil métallique.

1° *Mesures avec la boussole.*

Résistance intérieure 1 à 3......... 10,62 fois la résistance du fil.
Résistance intérieure 2 à 3......... 4,70 fois la résistance du fil.

Par suite, la résistance 1 à 2 = 10,62 — 4,70 = 5,92 fois celle du fil.

2° *Mesures avec l'électromètre.*

1|2.........	111,82
2|3.	92,57
3|1.........	19,43

$$\frac{1|2}{3|1} = \frac{111,82}{19,43} = 5,76, \text{ au lieu de } 5,92,$$

$$\frac{2|3}{3|1} = \frac{92,57}{19,43} = 4,76, \text{ au lieu de } 4,70.$$

Différence aux deux pôles de l'élément ouvert 156,47, nombre très-voisin de la somme

$$111,82 + 92,57 + 19,43 = 156,65.$$

Pour que l'expérience réussisse, il faut avoir soin de prendre un vase poreux qui est resté longtemps imbibé d'eau et de monter l'élément plusieurs heures avant de commencer les mesures. Sans ces précautions, comme la résistance du vase poreux ne devient pas de suite ce qu'elle doit être quand il s'est laissé pénétrer par les liquides, le résultat obtenu dans la mesure avec la boussole diffère de celui que fournit l'électromètre. Voici, à ce sujet, des nombres provenant d'essais faits avec l'élé-

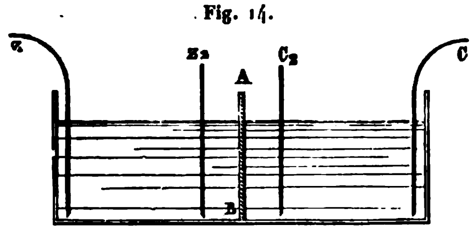
ment précédent quelque temps avant les déterminations définitives. Ils font voir comment, la résistance relative des différentes parties du circuit venant à varier, la distribution des différences de potentiel change dans le même sens. L'élément est resté monté de 11 heures du matin à 9 heures du soir.

11 heures du matin.	3 heures du soir.	9 heures du soir.
Circuit fermé. 1|2... 100,95	Circuit fermé. 1|2... 114,05	Circuit fermé. 1|2... 113,15
2|3... 93,7	2|3... 103,18	2|3... 102,03
3|1... 8,45	3|1... 9,15	3|1... 11,00
Circuit ouvert. 1|3... 138,5	Circuit ouvert. 1|3... 139,7	Circuit ouvert. 1|3... 138,1
138,5 − 100,95 = 37,55	139,7 − 114,05 = 25,65	138,1 − 113,15 = 25,95
37,55 + 8,45 + 93,7 = 139,65	25,65 + 103,18 + 9,15 = 137,98	25,95 + 102,03 + 11 = 138,98

D'après ce tableau, la résistance complexe 1 | 2 formée par le vase poreux, le sulfate de zinc et une certaine partie du sulfate de cuivre, a varié de 37,55 à 25,65, pour rester ensuite à peu près constante.

Résistance de la cloison poreuse. — Afin d'avoir une idée de la résistance que peut offrir une cloison poreuse seule, nous prenons une auge prismatique en verre, divisée en deux compartiments par la cloison AB (*fig.* 14). L'un des compartiments contient du sulfate de zinc

Fig. 14.



et une lame de zinc amalgamé Z ; l'autre contient du sulfate de cuivre et une lame de cuivre C. En Z_2 plonge une seconde lame de zinc amalgamé et en C_2 une seconde plaque de cuivre.

Les deux pôles Z et C sont réunis par un gros fil.

Appelons

α la résistance de la colonne ZZ_2 de sulfate de zinc;
β la résistance de la colonne CC_2 de sulfate de cuivre;
γ la résistance de la portion intermédiaire Z_2C_2.

Ces trois quantités se déduisent des déterminations suivantes :

$D = Z \mid C$ (circuit ouvert)......	104,25
$D = Z_2 \mid C_2$ (circuit ouvert)......	104
$\alpha = Z \mid Z_2$ (circuit fermé).......	29,25
$\beta = C \mid C_2$ (circuit fermé).......	35
$Z_2 \mid C_2$ (circuit fermé)......	64,75

Ce dernier nombre offre une vérification. En effet, comme $\alpha + \beta + \gamma = D$ et que $Z_2 \mid C_2$ doit être égal à $D - \gamma$, on aura

$$Z_2 \mid C_2 = \alpha + \beta.$$

Or

$$29,25 + 35 = 64,25,$$

résultat voisin de 64,75.

Calculons maintenant la résistance du sulfate de zinc compris entre Z_2 et AB, puis celle du sulfate de cuivre compris entre C_2 et AB; en retranchant de γ la somme de ces deux nombres, on aura la résistance de la cloison poreuse.

Comme ZZ_2 a une longueur de 24 centimètres,

$$\frac{29,25}{24} = 1,22$$

exprime la résistance d'une colonne de 1 centimètre de sulfate de zinc, et la distance de Z_2 à AB est de 5 centimètres :

$$1,22 \times 5 = 6,10.$$

De même CC_2 a une longueur de $26^c,7$, et, de C_2 à AB, on a $2^c,7$:

$$\frac{35}{26,7} \times 2,7 = 3,54.$$

6,10 + 3,54 représentent la résistance du sulfate de zinc et du sulfate de cuivre réunis.

$$\gamma = 104 - 64,50 = 38,5,$$
$$38,5 - (6,10 + 3,54) = 28,86 :$$

c'est la résistance de la cloison exprimée au moyen des mêmes unités que les résistances du sulfate de zinc et du sulfate de cuivre.

Résistance d'une pile. — D'après ce que nous avons vu, pour mesurer

la résistance d'une pile de trois éléments, par exemple, on cherchera la différence de potentiel aux deux pôles, le circuit étant ouvert; soit 300 le nombre obtenu. La même détermination aux deux pôles est répétée; quand le circuit est fermé, on a 247.

$$300 - 247 = 53$$

exprime la résistance des trois éléments. Pour l'évaluer en longueur de fil normal, il suffit de mesurer la différence aux deux extrémités d'une bobine connue, intercalée précédemment dans le circuit, et de comparer à 53 le nombre trouvé.

Mesure de la force électromotrice de polarisation. — Dans les expériences qui précèdent, la polarisation n'avait qu'une influence insensible. Lorsque la polarisation a un effet comparable à celui de la résistance du liquide, il y a lieu de déterminer simultanément la force électromotrice de polarisation et la résistance du liquide.

Dans une auge prismatique contenant 500 centimètres cubes d'eau acidulée, on faisait passer le courant de huit éléments Daniell. Quatre plaques de cuivre, dont deux servaient d'électrodes, partageaient la colonne en trois parties dont l'étude était faite séparément. Le circuit était complété au sortir de l'auge par des bobines comparées à l'unité de Pouillet (une colonne de mercure de 1 mètre de longueur et de 1 millimètre de section), ce qui permettait d'évaluer, au moyen de cette unité, la résistance du liquide.

La force électromotrice de polarisation décroît en même temps que l'intensité du courant elle-même diminue. Je décrirai deux expériences.

1° *Cas d'un courant énergique.* — L'auge et une bobine de 100 mètres forment le circuit. Une boussole de résistance négligeable donne la valeur de l'intensité; elle est, dans ce cas, représentée par le nombre 169.

	Différences observées.		Longueurs des colonnes.
$C_1 \mid C_4$.........	418,48	C_1 à C_4.........	$38^c,3$
$C_1 \mid C_2$.........	120,384	C_1 à C_2.........	11,6
$C_3 \mid C_4$.........	162,8	C_3 à C_4.........	9,9
Bobine........	235,6		
$C_2 \mid C_3$.........	134,6	C_2 à C_3.........	16,6

Aux deux pôles d'un Daniell isolé

$$D = 138,67.$$

La régularité des mesures est prouvée par une vérification :

$$C_1 | C_4 = C_1 | C_2 + C_2 | C_3 + C_3 | C_4 = 417,78,$$

au lieu de 418,48 observé.

Les nombres précédents permettent d'évaluer la force électromotrice de polarisation de chacune des plaques de cuivre et de l'exprimer en fonction de la force électromotrice de l'élément Daniell. On aura, en même temps, la résistance du liquide contenu dans l'auge.

La résistance d'une colonne d'eau acidulée de 1 centimètre de longueur est

$$\frac{134,6}{16,6} = 8,11;$$

la résistance de la colonne $C_1 C_2$,

$$r = 8,11 \times 11,6 = 94,076;$$

la résistance de la colonne $C_3 C_4$,

$$r' = 8,11 \times 9,9 = 80,3;$$

la résistance de la colonne entière $C_1 C_4$,

$$R = 8,11 \times 38,3 = 310,6.$$

La colonne entière offre la résistance de 132 unités Pouillet. En effet,

$$\frac{310,6}{235,6} = 1,32.$$

Nous déduisons des nombres précédents

$$C_1 | C_2 - r = 120,38 - 94,08 = 26,3;$$

26,3 est la force électromotrice de la plaque C_1 (plaque attaquée par l'acide), ou encore 18,9 si $D = 100$:

$$C_3 | C_4 - r' = 162,8 - 80,3 = 82,5;$$

82,5 est la force électromotrice de la plaque C_4 (plaque qui se recouvre d'hydrogène), ou 59,5 si $D = 100$.

La force électromotrice totale de polarisation a pour valeur

$$18,9 + 59,5 = 78,4.$$

2° *Cas d'un courant faible.* — L'auge et 20000 mètres forment le circuit. L'intensité du courant est 3,96. Les bulles de gaz sur la plaque de cuivre négative sont encore visibles :

	Différences observées.		Longueurs des colonnes.
$C_1 \mid C_4$	73,95	de C_1 à C_4	38°,3
$C_2 \mid C_3$	5,20	de C_2 à C_3	31,9
$C_1 \mid C_2$	4,90	de C_1 à C_2	3,2
$C_3 \mid C_4$	64,60	de C_3 à C_4	3,0
1000 mètres......	49,50		
Daniell ouvert D..	124,88		

Vérification.

$$C_1 \mid C_2 + C_2 \mid C_3 + C_3 \mid C_4 = 74,7, \quad \text{au lieu de } 73,95 \text{ observé.}$$

La résistance d'une colonne d'eau acidulée de 1 centimètre de longueur est

$$\frac{5,2}{31,9} = 0,163;$$

la résistance de la colonne $C_1 C_2$,

$$r = 3,2 \times 0,163 = 0,522;$$

celle de la colonne $C_3 C_4$,

$$r' = 3 \times 0,163 = 0,489;$$

celle de la colonne entière,

$$R = 38,3 \times 0,163 = 6,24.$$

La résistance de la colonne entière vaut celle de 128 unités Pouillet. En effet,

$$\frac{6,24}{4,95} = 1,28.$$

Dans ce cas particulier, la résistance du liquide est évaluée d'une ma-

nière peu certaine, car une petite erreur dans la mesure de $C_2 | C_3$ amène une grande différence dans le résultat.

La force électromotrice de C_1 est

$$C_1 | C_2 - r = 4,9 - 0,522 = 4,380 \quad \text{ou} \quad 3,5 \text{ si } D = 100.$$

La force électromotrice de C_4 est

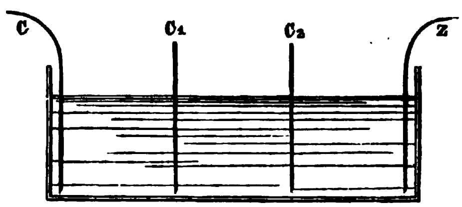
$$C_3 | C_4 - r' = 64,6 - 0,489 = 64,111 \quad \text{ou} \quad 51 \text{ si } D = 100.$$

La diminution est donc beaucoup plus forte pour la plaque positive que pour la plaque négative.

Mesure de la polarisation dans l'élément voltaïque. — Les mesures précédentes sont relatives à la détermination de la force électromotrice de polarisation pour un voltamètre intercalé dans le circuit; il est également intéressant d'évaluer la polarisation qui se produit dans l'élément lui-même.

Dans ce but, nous avons employé un élément de Volta à un seul liquide. Une auge prismatique (*fig.* 15), ayant environ 40 centimètres

Fig. 15.



de longueur et 4 de largeur, contenait de l'eau acidulée avec $\frac{1}{50}$ d'acide sulfurique : on y versait 750 centimètres cubes du mélange. Aux extrémités de l'auge se trouvaient des plaques polaires de la même largeur que l'auge, l'une en zinc amalgamé et l'autre en cuivre.

Supposons dans l'auge une lame de cuivre C_1 placée entre le cuivre C et le zinc amalgamé Z; en corrigeant les différences de potentiel observées de l'effet dû à la résistance du liquide interposé, la différence entre C et C_1 représentera la polarisation de la plaque de cuivre (l'expérience électrométrique montre que C, pendant le passage du courant, se comporte comme un métal oxydable par rapport à C_1); la différence

entre Z et C_1, également corrigée, donne la force électromotrice de l'élément pendant le passage du courant.

Pour la commodité des mesures, nous prendrons deux plaques de cuivre intermédiaires C_1 et C_2.

Voici les détails d'une expérience où la résistance extérieure était négligeable, le circuit interpolaire étant formé par un fil gros et court :

	Différences observées.	Distances.
$Z \mid C_2$	60,25	10,3
$C \mid C_2$	60,38	27,2
$C \mid C_1$	50,50	9,3
$Z \mid C_1$	50,75	28,2

$$\left.\begin{array}{l} C \mid C_2 - C \mid C_1 = 9,88 \\ Z \mid C_2 - Z \mid C_1 = 9,50 \end{array}\right\} \text{moyenne pour } C_1 \mid C_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9,69.$$

La résistance de 1 centimètre de liquide est

$$\frac{9,69}{17,9} = 0,54.$$

$$r = 0,54 \times 9.3 = 5,02,$$
$$r' = 0,54 \times 10,3 = 5,56.$$

La force électromotrice de polarisation du cuivre est

$$C \mid C_1 - r = 50,5 - 5,02 = 45,48.$$

La force électromotrice de l'élément ouvert a été mesurée et trouvée égale à $69,2 = E$.

La force électromotrice, quand le circuit est fermé, est égale à la somme des différences

$$9,69 + 5,02 + 5,56 = 20,27 = A.$$

Intensités.	E.	A.
1000,0	1	0,290
203,0	1	0,407
36,5	1	0,640
17,0	1	0,970

Ce tableau montre comment la polarisation diminue quand l'intensité du courant décroît.

Ici, comme pour les déterminations relatives à la polarisation dans un voltamètre, les mesures présentent des difficultés dans le cas des faibles intensités. Alors, en effet, quand on ferme le circuit, la polarisation est inférieure à la polarisation limite, qui n'est à peu près atteinte qu'après un temps très-long. D'un autre côté, si l'on observe une faible intensité en passant d'abord par une intensité beaucoup plus forte, la polarisation est beaucoup plus grande que la polarisation limite. Il a été alors nécessaire de déterminer deux nombres, l'un supérieur, l'autre inférieur à la polarisation limite, et de prendre la moyenne.

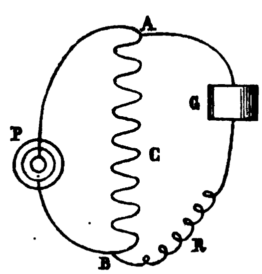
IV. — *Relations entre les mesures électrométriques et les indications du galvanomètre.*

Nous examinerons le cas où le galvanomètre forme une dérivation entre deux points A et B du circuit et celui où il est placé dans le circuit lui-même entre A et B.

Premier cas. — *Le galvanomètre forme une dérivation.* — L'intensité donnée par le galvanomètre est proportionnelle à la différence de potentiel observée entre les deux points de jonction.

Pour constater cette proportionnalité, un fil de fer (*fig.* 16) a été tendu entre les deux pôles d'une pile P. Une boussole à miroir G était

Fig. 16.



reliée d'abord aux deux points A et B, et ceux-ci mis en communication avec l'électromètre, puis aux deux points A et C. En intercalant

des bobines, on a fait varier la résistance R du circuit dérivé comprenant la boussole :

Résistance R.		Électromètre.	Boussole (déviations).
1000 mètres..	A|C......	82,83	17,20 (un seul tour de fil)
	A|B......	213,30	44,50
		$\frac{213,3}{82,83}=2,577$,	$\frac{44,5}{17,2}=2,58$,
500 mètres...	A|C......	72,68	30,35 (un seul tour de fil)
	A|B......	202,43	84,50
		$\frac{202,43}{72,68}=2,785$,	$\frac{84,5}{30,35}=3,786$,
15000 mètres.	A|C.. ...	90,75	12,75 (dix tours de fil)
	A|B......	216,65	30,20
		$\frac{216,65}{90,75}=2,38$,	$\frac{30,2}{12,75}=2,37$.

Il est naturel que la chute entre deux points soit modifiée quand on fait varier la longueur du circuit dérivé qui comprend la boussole, puisqu'il se produit alors un changement dans la longueur réduite de la partie du circuit comprise entre les deux points.

Quand la résistance du circuit examiné est faible, le galvanomètre peut remplacer l'électromètre et donner des indications sensiblement proportionnelles à la chute entre les différents points, mais il faut avoir soin de lui adjoindre une bobine de fil très-fin et très-long : on rend ainsi négligeable la diminution de résistance de la partie du circuit comprise entre les deux points de jonction. L'électromètre seul convient s'il s'agit de faire l'étude de conducteurs très-résistants et, en particulier, de colonnes liquides.

DEUXIÈME CAS. — *Le galvanomètre fait partie du circuit principal.* — Soient

A et B deux points d'un conducteur;
a le potentiel de A;
b le potentiel de B;

la différence $a - b$ est proportionnelle à l'intensité du courant évaluée

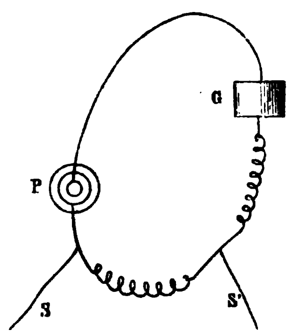
par un galvanomètre placé dans le circuit. Ceci s'exprime par la formule connue

$$i = C\frac{a-b}{r};$$

C est une constante et r représente la résistance de la partie AB.

Les observations ont été conduites de la manière suivante : entre les deux pôles de la pile P (*fig.* 17), étaient intercalées des résistances mé-

Fig. 17.



talliques ou liquides et en particulier des bobines sur lesquelles avaient été enroulées des longueurs connues de fil. La boussole des tangentes de Pouillet donnait les intensités pour les courants forts et une boussole à miroir pour les courants faibles. On mesurait avec l'électromètre les différences de potentiel correspondant aux extrémités de l'une des bobines. On choisissait dans chaque expérience pour la mettre en rapport avec l'électromètre celle des bobines du circuit pour laquelle la différence de potentiel aux deux extrémités avait une valeur telle, que la déviation de la plaque mobile fût comprise entre des limites convenables. Les résultats qui suivent sont rapportés à 100 unités de Pouillet.

La différence entre les deux pôles d'un élément Daniell ouvert est représentée par 100.

ÉLECTROMÈTRE.		BOUSSOLE.			
DÉVIATIONS.	RAPPORT d'une déviation à la suivante.	BOUSSOLE de Pouillet.	BOUSSOLE A MIROIR.		RAPPORT d'une tangente à la suivante.
			1 tour de fil.	10 tours.	
146,0		43° 42' (tang = 0,956).			
	2,18				2,18
67,6		23° 15' (tang = 0,429).			
	1,680				1,677
40,34		14° 18' (tang = 0,255).			
	1,44				1,50
28,00		9° 39' (tang = 0,17).	63,67		
	2,99				3,00
9,37			21,22		
	2,366				2,358
3,96			9,00	86,4	
	2,414				2,383
1,64				36,25	

Le courant étant produit par 8 éléments Daniell, le nombre fourni par l'électromètre fait connaître dans chaque cas la résistance totale du circuit. Soient, en effet, A, B, C trois points du circuit; on a vu que la somme des différences de potentiel entre A et B, entre B et C et entre C et A est égale à la différence totale observée aux deux pôles de la pile dans le cas où le circuit est ouvert. De plus le potentiel se distribue proportionnellement à la résistance. Ici la différence 800 se partage de façon à donner 146 pour 100 unités de Pouillet dans la première mesure, 67,6 dans la seconde, 40,34 dans la troisième, etc.; les résistances totales exprimées en centaines d'unités seront donc

$$\frac{800}{146}, \quad \frac{800}{67,6}, \quad \frac{800}{40,34}, \ldots.$$

Une mesure comparative, faite dans les conditions précédentes avec un électromètre et une boussole des tangentes, permet d'obtenir le coefficient par lequel il suffit de multiplier les indications de la boussole

pour obtenir avec la boussole seule la différence de potentiel correspondant aux extrémités de 100 unités et en même temps la valeur exacte de la résistance totale du circuit.

Ainsi, dans les expériences précédentes, 146 ayant été donné par l'électromètre et 0,956 par la boussole, on multipliera les tangentes ournies par la boussole par le rapport $\frac{146}{0,956}$ et l'on aura les différences de potentiel successives aux extrémités de 100 mètres. La résistance totale sera le quotient de 800 par la différence obtenue et elle sera exprimée en centaines d'unités.

Détermination de l'intensité des courants au moyen de l'électromètre. — Si dans la formule

$$i = C\frac{a-b}{r}$$

nous faisons $C = 1$, nous pourrons dire que le courant ayant l'unité d'intensité est celui pour lequel la différence de potentiel aux deux extrémités de l'unité de résistance est égale à l'unité de potentiel électrique. L'unité de potentiel électrique est le potentiel d'une sphère chargée de l'unité d'électricité et dont le rayon est égal à l'unité de longueur.

Si l'on a exprimé en unités de potentiel la différence aux deux pôles d'un élément Daniell, on peut aussi prendre pour unité d'intensité l'intensité du courant produisant, aux deux extrémités de 1 kilomètre de fil télégraphique ou de 100 unités, une différence égale au centième de celle qui existe entre les deux pôles d'un Daniell. Le courant ayant l'unité d'intensité sera celui que produit un élément Daniell dans un circuit total présentant la même résistance que 100 kilomètres de fil télégraphique. D'après cela, dans les expériences citées plus haut, les intensités sont 146, 67,6, 40,34,....

On comprend alors l'usage de l'électromètre pour la détermination de l'intensité; les résultats obtenus à des époques différentes sont comparables, si l'on a soin de mesurer en même temps la différence de potentiel, aux deux pôles d'un Daniell. Il est bien entendu que l'élément Daniell doit toujours être construit de la même façon et formé de deux

vases séparés pour éviter le filtrage du sulfate de cuivre à travers le vase poreux.

Une mesure comparative, faite avec l'électromètre et une boussole, déterminera le coefficient par lequel les indications de cette dernière doivent être multipliées pour représenter les intensités avec l'unité adoptée.

ÉTUDE

SUR LES

TRANSFORMATIONS ISOMÉRIQUES

ET ALLOTROPIQUES,

PAR MM. L. TROOST ET P. HAUTEFEUILLE.

Le parallélisme des tensions de dissociation et des tensions maxima des vapeurs, développé par M. H. Sainte-Claire Deville dans ses Leçons sur la dissociation (¹), établit un système d'analogies entre les phénomènes chimiques de combinaison ou de décomposition des corps et les phénomènes physiques de volatilisation ou de condensation des vapeurs.

Les recherches qui font l'objet de ce Mémoire montrent que la transformation isomérique des corps qui peuvent prendre l'état gazeux rappelle ces deux phénomènes : la transformation est partielle pour une température donnée et progressive à mesure que la température s'élève; la pression finale que prend le produit gazeux lorsque l'expérience est suffisamment prolongée, constante pour chaque température, peut servir à mesurer ce que nous appelons la *tension de transformation*.

Ces transformations offrent un nouvel exemple de phénomènes chimiques obéissant aux mêmes lois que la dissociation et la vaporisation, et les tensions de transformation viennent se placer entre les tensions de dissociation et les tensions maxima des vapeurs (²).

(¹) Voir *Leçons de la Société Chimique;* Paris, Hachette, 1866.
(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXVI, p. 735 et 795; t. LXVII, p. 1345; t. LXXVI, p. 76 et 219.

CHAPITRE I.

TRANSFORMATION DU PARACYANOGÈNE EN CYANOGÈNE ET TRANSFORMATION INVERSE.

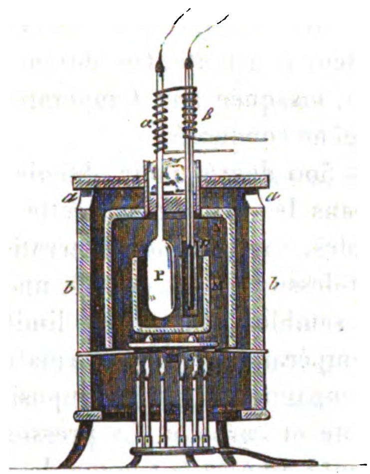
Le cyanogène, auquel Gay-Lussac a trouvé un isomère, le paracyanogène, nous a paru mériter une étude spéciale : c'est un corps composé qui jouit de toutes les propriétés d'un corps simple; il était intéressant de savoir si, dans son passage d'un état isomérique à l'autre, il présente des phénomènes comparables à la vaporisation d'un liquide et à la condensation de sa vapeur. Cette transformation pouvant s'étudier par les procédés et avec les appareils que les physiciens emploient pour déterminer les lois de la variation des forces élastiques, nous avons institué les expériences suivantes :

Le paracyanogène, préparé par les procédés que nous décrivons plus loin, est soumis à l'action de la chaleur dans des tubes en verre de Bohême que l'on met, à l'aide de tubes capillaires de cuivre et d'un robinet à trois voies, en communication avec un manomètre et une machine pneumatique de Geissler. Cette disposition permet de mesurer la pression du cyanogène et d'extraire le gaz produit pour en constater la pureté.

Ces tubes ont été chauffés successivement dans la vapeur de soufre (440 degrés) et de cadmium (860 degrés). Pour les températures intermédiaires qu'il nous était indispensable d'obtenir, nous avons employé une étuve formée de trois enveloppes concentriques en terre *b*, M, *c*, et chauffée par du gaz convenablement réglé. Le mouvement de l'air chaud se fait dans l'espace annulaire extérieur; l'enveloppe médiane M, fermée par en haut, est donc chauffée sur toute sa surface, et l'air chaud qu'elle contient ne participe pas au mouvement du gaz, quoique en libre communication avec lui. L'enveloppe intérieure *c*, fermée par le bas, se trouve placée dans une nappe tranquille d'air chaud; elle renferme les tubes à paracyanogène ainsi que l'appareil thermométrique. Celui-ci est formé d'un cylindre en porcelaine P plein d'air sec, communiquant avec le manomètre employé par l'un de nous dans des recherches faites avec M. H. Sainte-Claire Deville sur les densités de vapeur à des températures très-élevées. Les indications de ce

thermomètre nous ont permis de mesurer très-exactement les températures et, de plus, de constater que nos appareils pouvaient être maintenus pendant plusieurs heures à une température parfaitement constante.

Fig. 1.



Le paracyanogène chauffé à 860 degrés se transforme complétement en cyanogène gazeux, qui atteint rapidement la pression nécessaire à sa liquéfaction dans les parties froides de l'appareil ; c'est donc à une température plus basse que le phénomène de la transformation partielle est observable.

A 440 degrés, il abandonne dans le vide une notable quantité de cyanogène, et le manomètre indique une pression assez forte; mais, si l'on enlève le gaz à l'aide de la machine pneumatique, on reconnaît qu'il arrive bientôt un moment où le vide se maintient. Le paracyanogène n'a donc pas de tension de transformation sensible à cette température, et s'il s'est dégagé du cyanogène dans les premiers instants, c'est que le paracyanogène, corps très-poreux, retient les gaz qu'il a condensés avec une énergie comparable à celle avec laquelle le charbon retient le gaz ammoniac, dont il n'abandonne les dernières traces qu'au rouge (¹).

(¹) Ainsi que l'a constaté M. Isambert.

Ce dégagement de gaz cyanogène complique l'étude des conditions physiques dans lesquelles se produit la transformation du paracyanogène en cyanogène gazeux. On élimine cette cause d'erreur en faisant avec le paracyanogène, maintenu longtemps à la même température, plusieurs déterminations; on expulse chaque fois une certaine quantité de gaz après avoir mesuré la pression, et cela jusqu'à ce que cette pression garde une valeur constante. On obtient ainsi la véritable tension de transformation, masquée aux températures peu élevées par le dégagement du cyanogène condensé.

Il faut chauffer vers 500 degrés pour obtenir une tension de transformation sensible. Dans le voisinage de cette température, les tensions sont encore faibles, mais d'une observation facile. Dès que la température s'élève au-dessus de 550 degrés, une nouvelle difficulté se présente : les tensions semblent croître sans limite avec le temps; c'est qu'à partir de cette température la transformation du paracyanogène en cyanogène est accompagnée d'une décomposition mesurable, quoique très-lente, en azote et carbone. La pression observée doit donc augmenter constamment : elle est la somme des pressions du gaz cyanogène et de l'azote. L'analyse du gaz devient alors indispensable pour calculer la pression de cyanogène que supporte le paracyanogène. Ces précautions prises, on constate que la tension de transformation croît avec la température et est constante pour une température donnée.

Pour confirmer l'exactitude de nos déterminations, nous avons jugé utile de faire des expériences comparatives sur des quantités de matières très-différentes : deux tubes contenant l'un 10 grammes, l'autre 20 grammes de paracyanogène (¹), ont été chauffés dans des conditions identiques; ils nous ont fourni les mêmes valeurs pour les pressions de cyanogène, quoique les pressions totales dues au mélange de cyanogène et d'azote fussent très-différentes.

Le tableau suivant, qui contient quelques-uns des résultats de nos expériences, montre la loi que suivent les tensions de transformation du paracyanogène en cyanogène.

(¹) Le paracyanogène étant un corps extrêmement léger et spongieux, nous avons été obligés, pour opérer sur une grande quantité de matière, de le comprimer en petits cylindres.

TEMPÉRATURES.	TENSIONS de transformation du paracyanogène.	OBSERVATIONS.
502°	54mm	Les nombres avec astérisques ont été obtenus avec le paracyanogène préparé par le cyanure d'argent. Les autres ont été fournis par le paracyanogène extrait du cyanure de mercure, et parfaitement débarrassé du métal.
506	56	
559	123*	
575	129*	
587	157	
599	275*	
601	318	
629	868*	
640	1310	

On voit donc qu'en éliminant les complications inhérentes au sujet, on peut arriver à établir que le paracyanogène, entre certaines limites de température, se transforme partiellement en cyanogène, et que cette transformation s'arrête dès que le cyanogène exerce sur le paracyanogène une pression déterminée pour chaque température.

Cette invariabilité de la pression pour une température donnée suffirait à elle seule pour établir l'existence de la transformation inverse du cyanogène en paracyanogène : nous avons vérifié le fait par des expériences directes exécutées en soumettant à l'action de la chaleur des tubes scellés à la lampe, qui contenaient de petites quantités de cyanogène liquéfié et pur; mais, bien que la transformation du paracyanogène en cyanogène s'effectue rapidement, la transformation inverse est extrêmement lente. La température la plus favorable est celle de 500 degrés environ ; la transformation s'effectue cependant déjà à des températures inférieures, celle de 440 degrés et même celle de 350 degrés, par exemple ; mais alors elle est d'une lenteur excessive [1].

[1] On peut rendre cette transformation beaucoup plus rapide en ajoutant un globule de mercure dans le tube scellé, contenant le cyanogène liquéfié. On constate alors que dans ces conditions de température et de pression le mercure se combine directement au cyanogène et forme du cyanure de mercure qui vient se condenser en partie dans les points les moins chauds de l'appareil. Ce cyanure de mercure, en subissant ultérieurement une décomposition partielle, laisse un squelette de paracyanogène dont le poids vient s'ajouter à celui qui est produit par la transformation directe.

Pour avoir les quantités de paracyanogène pur nécessaires pour les expériences que nous venons de décrire, nous avons dû étudier le meilleur procédé de préparation de ce corps; nous donnerons successivement l'action de la chaleur sur le cyanure de mercure et sur le cyanure d'argent.

Action de la chaleur sur le cyanure de mercure. — On sait que le cyanure de mercure soumis à l'action de la chaleur laisse un résidu de paracyanogène. Nous avons recherché comment la proportion de paracyanogène qui se forme est influencée tant par la température à laquelle s'effectue la décomposition du cyanure que par la pression exercée par le cyanogène sur le sel qui se décompose.

L'emploi des appareils à température constante produite, par les vapeurs de liquides maintenus en ébullition, nous a permis de réaliser un grand nombre d'expériences comparables, exécutées dans des tubes scellés à la lampe et portés en tous leurs points à la même température. Cette dernière précaution est indispensable si l'on veut faire des déterminations numériques; car, dans toutes les opérations exécutées dans des tubes dont une partie seulement était chauffée, nous avons constaté qu'une certaine quantité de cyanure de mercure échappait à la décomposition par suite d'une volatilisation apparente ou réelle, et se déposait sur les parties froides en beaux cristaux incolores qui appartiennent au système du prisme droit à base carrée.

Le tableau suivant, qui résume quelques-uns de nos résultats, fait nettement ressortir l'avantage d'une décomposition à basse température et sous une forte pression :

TEMPÉRATURE.	PRESSION qu'exercerait la totalité du cyanogène.	PRESSION FINALE du cyanogène non transformé.	PROPORTION de paracyanogène.	OBSERVATIONS.
350° (mercure bouillant).	21 atmosph.	14 atmosph.	34 p. 100	Dans ces expériences, le cyanure de mercure a été complétement décomposé après 72 heures de chauffe à 350 degrés, ou après 26 heures de chauffe à 440 degrés. La décomposition à 600 degrés se fait en quelques instants : dans ces conditions, le cyanogène gazeux qui se dégage est complétement absorbable par la potasse.
	32 »	20,5 »	37 p. 100	
	57 »	34 »	40 p. 100	
440° (soufre bouillant).	... »	1 »	12 p. 100	
	35 »	30 »	15 p. 100	
	45 »	36 »	20 p. 100	
	62 »	48 »	23 p. 100	
	108 »	65 »	40 p. 100	
600° environ (étuve à air).	82 »	63 »	22 p. 100	

Préparation du paracyanogène. — Pour préparer le paracyanogène, on introduira donc le cyanure de mercure par fractions de 5 grammes dans des tubes en verre très-résistant, de 10 centimètres environ de capacité, qu'on ferme à la lampe et qu'on chauffe ensuite pendant vingt-quatre heures à la température de 440 degrés (soufre en ébullition). A cette température, le paracyanogène est complétement inaltérable (¹).

Les $\frac{40}{100}$ environ du cyanogène passent à l'état de paracyanogène. Pour débarrasser ce corps du mercure qui s'y trouve mélangé intimement, on fera passer dans le tube, porté de nouveau à 440 degrés, après avoir été ouvert aux deux extrémités, un courant de cyanogène gazeux qui entraînera le métal. Ce mode de purification du paracyanogène, par voie sèche et à une température peu élevée, est préférable au procédé ordinaire de purification par l'acide sulfurique et calcination au rouge sombre; car le paracyanogène est un corps très-poreux et très-hygrométrique qui retient énergiquement tous les réactifs avec lesquels on le met en contact. La petite quantité d'eau qu'il absorbe

(¹) On obtient, dans ces conditions, des résultats beaucoup meilleurs que par le procédé de Brown, qui consiste à chauffer *au rouge sombre* du cyanure de mercure dans un tube de fer fermé par un bouchon métallique, que traverse un conduit obstrué avec du plâtre. Ce plâtre devient poreux en perdant son eau; il laisse partir les vapeurs mercurielles et à plus forte raison le cyanogène.

à l'air suffit pour déterminer, lorsqu'on le chauffe, la formation d'acide cyanhydrique et de composés ammoniacaux. La calcination seule au rouge sombre détruirait d'ailleurs une notable quantité de paracyanogène.

Action de la chaleur sur le cyanure d'argent. — Après avoir étudié la préparation du paracyanogène par le cyanure de mercure, nous nous sommes demandé si l'on n'obtiendrait pas de meilleurs résultats par l'emploi du cyanure d'argent. Les particularités singulières de la décomposition de ce corps, à peine signalées jusqu'à ce jour, méritaient d'ailleurs une étude spéciale.

D'après Thaulow, le cyanure d'argent, soumis à l'action de la chaleur, abandonne *la moitié* de son cyanogène à l'état gazeux; il se produit en même temps une incandescence de toute la masse, et *l'autre moitié* du cyanogène, transformée en paracyanogène, reste unie à l'argent et à l'état de *paracyanure* [1]. Il résulte de nos expériences que le cyanure d'argent se décompose à une température très-peu supérieure à 350 degrés. Chauffé progressivement jusqu'à 440 degrés et maintenu à cette température, il se décompose complétement, sans fusion ni ignition. La proportion du cyanogène qui, dans ces conditions, passe à l'état de paracyanogène est d'environ 17 pour 100 si l'on maintient le vide pendant la décomposition; elle atteint 20 pour 100 si l'on opère sous la pression atmosphérique, et peut s'élever jusqu'à 64 pour 100 quand on opère dans des tubes scellés, où la pression est d'environ 60 atmosphères.

---

[1] Le paracyanure d'argent résisterait, suivant Thaulow, à la chaleur la plus intense; pour en séparer l'argent, il emploie successivement l'acide azotique étendu et l'acide sulfurique concentré. Quant au gaz cyanogène, qui s'est dégagé pendant la décomposition du cyanure, il différerait, suivant lui, du gaz que donne le cyanure de mercure : il aurait une odeur tout autre, il exciterait les vomissements et se liquéfierait à 4 degrés sous la pression atmosphérique.

Dans les nombreuses expériences que nous avons faites sur la décomposition du cyanure d'argent par la chaleur, nous avons toujours obtenu du gaz cyanogène identique à celui que fournit le cyanure de mercure; il a la même odeur vive qui prend aux yeux et aux narines; il ne se liquéfie à zéro que sous la pression de 4 atmosphères ou à — 20 degrés sous la pression atmosphérique. Les propriétés singulières observées par Thaulow nous paraissent dues à la présence d'un peu d'acide cyanhydrique tenant à la difficulté de dessécher complétement le cyanure d'argent, corps très-hygrométrique.

Le cyanure d'argent, dont on élève lentement la température jusqu'à 600 degrés environ sous la pression ordinaire, se décompose sans fusion ni ignition, tandis qu'il y a fusion et ignition si l'élévation de température est très-brusque; mais, dans les deux cas, il laisse dégager à l'état gazeux plus de la moitié de son cyanogène; la proportion de paracyanogène formé ne dépasse pas 41 pour 100.

Si, à cette même température, on opère en vase clos, où la pression atteint 80 atmosphères, on obtient jusqu'à 76 pour 100 de paracyanogène.

La proportion de paracyanogène augmente donc très-notablement avec la pression que supporte le cyanure au moment de sa décomposition, que cette décomposition soit ou non accompagnée de fusion et d'ignition, phénomène qui se produit toujours lorsqu'une forte proportion de cyanogène passe *brusquement* à l'état de paracyanogène. Les proportions variables de paracyanogène obtenues dans les expériences que nous venons de citer excluent toute idée de combinaison définie entre ce corps et l'argent. Le paracyanogène n'est pas là à l'état de paracyanure; il est simplement disséminé dans l'argent pulvérulent ou fondu, et on l'en isole en broyant la matière avec du mercure; ce métal s'empare de l'argent et laisse le paracyanogène avec ses propriétés ordinaires.

Quoique le cyanure d'argent, chauffé en vase clos, fournisse plus de paracyanogène qu'une quantité équivalente de cyanure de mercure, ce dernier sel paraît devoir être préféré pour la préparation du paracyanogène, parce qu'il est plus facile à préparer, à purifier et à dessécher.

CHAPITRE II.

TRANSFORMATION DE L'ACIDE CYANIQUE EN SES ISOMÈRES ET TRANSFORMATIONS INVERSES.

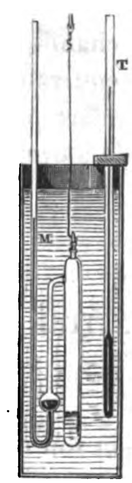
L'acide cyanurique ordinaire et son isomère la cyamélide (acide cyanurique insoluble), qui se transforment en acide cyanique gazeux sous l'influence de la chaleur, vont nous présenter des phénomènes comparables à ceux que nous a offerts le paracyanogène. Ici aussi la pression

du gaz cyanique pourra servir à mesurer la tension de transformation de ses isomères.

La cyamélide et l'acide cyanurique ne se transforment pas d'une manière sensible en acide cyanique au-dessous de 150 degrés. Vers 440 degrés (soufre bouillant), cette transformation est très-rapide, mais elle se complique d'une décomposition partielle. Cette décomposition très-lente devient cependant sensible quand on prolonge la durée de l'expérience, comme cela est nécessaire pour s'assurer de la constance de la pression exercée par l'acide gazeux; aussi la détermination de cette pression exige-t-elle que l'on tienne compte de la force élastique des gaz permanents. Aucune décomposition ne se produisant au-dessous de 350 degrés, on pourra, avec toute sécurité, mettre en évidence la marche des tensions de transformation de ces corps si l'on se borne à observer entre 150 et 350 degrés.

La difficulté que l'on éprouve, même en se restreignant entre ces limites, à maintenir à une température constante les diverses parties de tubes de grande hauteur nous a forcés à employer des méthodes entièrement différentes suivant que nous opérions au-dessus ou au-dessous de 250 degrés. L'appareil qui nous sert au-dessous de cette

Fig. 2.



température se compose d'un tube de verre renfermant la matière solide et portant latéralement un manomètre d'environ 30 centimètres de

hauteur. On fait le vide dans l'appareil avant de le fermer à la lampe, et on le plonge ensuite dans un bain d'huile maintenu à une température constante par un fourneau à gaz convenablement réglé.

Dans le voisinage de 250 degrés, le phénomène présente une parfaite analogie avec celui de la vaporisation des liquides; la colonne de mercure atteint assez rapidement, dans le manomètre, une hauteur limite indépendante de la quantité de matière en excès, et de l'état cristallisé ou amorphe de cette matière (acide cyanurique ou cyamélide).

Une élévation de température accroît la pression, mais celle-ci reprend, au bout de quelques heures, sa première valeur si l'on revient à la température initiale de l'observation.

Ces tensions de transformation isomérique ne se manifestent pas avec la même rapidité dans toutes les parties de l'échelle thermométrique; ainsi, entre 150 et 200 degrés, la pression n'atteint que très-lentement sa valeur maximum, et quand, par une nouvelle élévation momentanée de température, on a dépassé cette limite, il faut plusieurs jours pour que la pression revienne à la valeur primitivement observée. La transformation de l'acide cyanique gazeux en son isomère solide est encore beaucoup plus lente quand, après avoir chauffé au-dessus de 150 degrés, on abaisse la température au-dessous, à 100 degrés par exemple; elle n'est pas achevée au bout de huit jours. L'isomère qui prend naissance dans la transformation de l'acide cyanique diffère d'ailleurs suivant la température à laquelle elle se produit; ainsi, au-dessus de 150 degrés, on obtient des cristaux d'acide cyanurique ordinaire parfaitement transparents et solubles dans l'eau (1); au-dessous de 150 degrés, on obtient de la cyamélide ou acide cyanurique insoluble amorphe.

Nous avons exécuté simultanément trois séries d'expériences avec des appareils identiques, chauffés dans le même bain, afin de pouvoir comparer la marche de la transformation de l'acide cyanurique et de la cyamélide. La première série d'expériences a été faite avec de l'acide cyanurique parfaitement sec, la seconde et la troisième avec de la cyamélide; mais le poids de cyamélide employé dans la seconde était dix fois moindre que dans l'autre. Nous avons ainsi constaté que les pres-

(1) La cyamélide longtemps à cette température se transforme en acide cyanurique cristallisé.

sions étaient bien indépendantes de la quantité de matière et de la nature de l'isomère qui sert de point de départ.

Le tableau suivant résume les résultats que nous avons obtenus; il montre que les tensions du gaz cyanique émis, soit par la cyamélide, soit par l'acide cyanurique, croissent avec la température, et que la transformation s'arrête dès que le gaz cyanique exerce sur son isomère une pression déterminée pour chaque température :

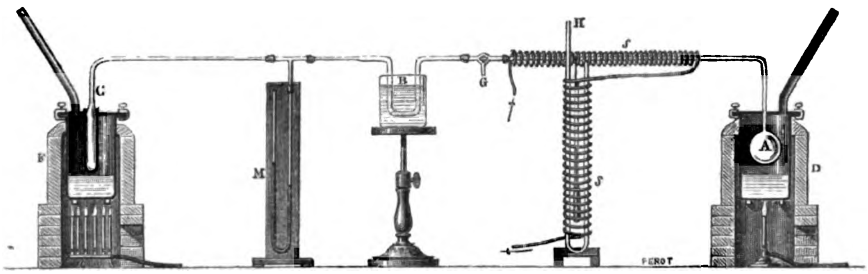
Températures.	Tensions de transformation.
160°	56mm
170	68
180	94
195	125
215	157
227	180
251	285
330	740
350	1200

Les deux derniers nombres ont été obtenus par une méthode différente de celle qui est décrite ci-dessus; elle repose sur l'observation suivante, faite dans le cours de nos expériences : *l'acide cyanique en vapeur se transforme d'autant plus rapidement en son isomère solide, quand on dépasse la pression limite correspondant à une température donnée, que celle-ci est plus élevée*. L'élévation de température facilite donc le dégagement de chaleur qui accompagne la transformation. Ainsi, tandis qu'un excès de vapeur résiste pendant plusieurs jours à la température ordinaire, il se transforme en quelques heures à 250 degrés et en quelques minutes à 350 degrés. Il en résulte que, si l'on fait arriver dans un appareil, dont les différents points sont à des températures très-différentes, du gaz acide cyanique sous une pression supérieure à la tension de transformation qui correspond à la température la plus élevée, c'est, d'après ce que nous venons de dire, dans ces points les plus chauds que se fera la condensation la plus rapide de l'excès de vapeur, et c'est la pression limite correspondant à cette température qui s'établira au bout de peu de temps.

En nous fondant sur ces faits, nous avons employé un appareil com-

posé d'un ballon A communiquant avec un manomètre à mercure H. Le ballon était porté à 350 degrés (mercure bouillant), et toutes les autres parties étaient entourées d'un serpentin métallique *s*, *s* dans lequel circulait constamment de la vapeur d'eau à 100 degrés.

Fig. 3.



Après avoir fait le vide dans le ballon, on y fait arriver rapidement de la vapeur d'acide cyanique (¹); la pression augmente et atteint bientôt 1200 millimètres. A partir de ce moment, elle reste constante, quelle que soit la quantité de vapeur cyanique que l'on fasse pénétrer dans le ballon, l'excès se transformant au fur et à mesure. On connait donc ainsi la tension de transformation correspondant à 350 degrés. Une seconde opération, faite dans des conditions analogues, nous a donné la tension de transformation à 330 degrés. Ces dernières observations suffiraient à elles seules pour établir que l'acide cyanique et la cyamélide ont, comme le paracyanogène, aux différentes températures, une tension constante de transformation.

L'ensemble des expériences précédentes établit que l'acide cyanique en vapeur, porté à des températures déterminées, se transforme partiellement en acide cyanurique, et que les tensions qui limitent le

(¹) L'acide cyanique employé est préparé en décomposant dans un tube C chauffé à 440 degrés (soufre bouillant) de l'acide cyanurique sec ou de la cyamélide pure. Au-dessous de cette température la transformation se fait avec une trop grande lenteur. L'acide cyanique qui se dégage à l'état de vapeur est condensé dans un récipient B maintenu à — 20 degrés par un mélange de glace et de chlorure de calcium cristallisé. Le tube C est séparé du récipient par un trait de chalumeau, dès qu'on a recueilli assez d'acide cyanique liquide. On n'établit la communication du ballon A avec le récipient B qu'après avoir expulsé de celui-ci les gaz permanents en y faisant le vide.

phénomène sont numériquement égales à celles qu'on obtient dans la transformation inverse.

Avant nos recherches, on ne connaissait que la transformation de l'acide cyanique liquide décrite par M. Wöhler. La différence profonde qui existe entre la transformation isomérique de ce liquide et celle de sa vapeur est maintenant facile à caractériser.

L'acide cyanique liquide, maintenu à zéro, se transforme rapidement et d'une façon complète ; mais, pendant que le liquide se transforme, la vapeur qui sature l'espace libre au-dessus de lui conserve temporairement son état gazeux et la tension maximum qu'elle avait avant le changement isomérique du liquide. Cette vapeur n'échappe cependant pas indéfiniment à la transformation en cyamélide; celle-ci apparaît peu à peu en couche mince et uniforme sur les parois du verre dans lequel se fait à la longue un vide absolu.

Si, au lieu de considérer la vapeur d'acide cyanique à zéro, nous la prenons à une température élevée, 200 degrés par exemple, il résulte de nos expériences que la transformation est limitée. La vapeur cesse de se transformer dès que sa tension, après avoir diminué peu à peu, a pris une valeur minimum différente de la tension primitive de la vapeur d'acide cyanique. Cette tension nouvelle est la tension de transformation.

Ainsi la tension de transformation d'une vapeur pour une température donnée se distingue de sa tension maximum relative à la même température à la fois par sa valeur absolue et par ce fait qu'elle ne s'établit en général que très-lentement. Ce n'est qu'à des températures élevées que la rapidité avec laquelle on obtient la tension de transformation devient plus grande et comparable à celle avec laquelle s'établit la tension maximum d'une vapeur.

Cette distinction entre la tension maximum d'une vapeur et sa tension de transformation permet de comprendre le phénomène complexe présenté par une substance qui, à une même température, peut se vaporiser et se transformer. On a d'abord, pendant un temps plus ou moins long, une tension maximum de vapeur, limitant le phénomène physique de la vaporisation ; puis, finalement, une tension minimum qui limite le phénomène chimique de la transformation.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATIONS ALLOTROPIQUES DU PHOSPHORE.

La distinction que nous venons d'établir va nous permettre d'analyser complétement la transformation allotropique du phosphore et de séparer des phénomènes jusqu'ici confondus et regardés, malgré leur différence profonde, comme devant obéir à une seule et même loi. La transformation du phosphore blanc liquide en phosphore rouge rappelle la transformation de l'acide cyanique liquide en cyamélide, tandis que la production du phosphore rouge aux dépens de la vapeur de phosphore obéit aux lois de la transformation du gaz cyanique en acide cyanurique.

Cette double origine du phosphore rouge complique les expériences faites avec un poids de phosphore supérieur à celui qui est susceptible de se vaporiser dans une enceinte donnée. Elle ne permet de formuler aucune hypothèse qui puisse rendre compte, d'une manière générale, de la vitesse avec laquelle se produit la transformation du phosphore dans la première partie de l'expérience.

La facilité avec laquelle se fait la transformation du phosphore liquide porté à une certaine température, 280 degrés par exemple, est de tous points comparable à la production de la cyamélide aux dépens de l'acide cyanique liquide (1). Comme celle-ci, elle porte sur la totalité du phosphore resté liquide. La vapeur émise vers 260 degrés se montre aussi stable à cette température que le gaz cyanique à une température basse.

D'un autre côté, à une température suffisamment élevée, la vapeur de phosphore, comme celle de l'acide cyanique, éprouve une transformation seulement partielle : le phosphore rouge prend naissance, comme l'acide cyanurique, aux dépens d'une vapeur, et la transformation cesse lorsque la pression, après avoir diminué graduellement,

(1) Cette similitude se poursuit dans les effets calorifiques : la transformation de l'acide cyanique liquide en cyamélide se produit avec dégagement de chaleur et de lumière; celle du phosphore blanc, porté à 280 degrés, détermine une élévation brusque de la température du liquide qui, d'après M. Hittorf, passe de 280 à 370 degrés.

atteint une nouvelle limite. La rapidité de ce changement est d'autant plus grande que la température est plus élevée.

Nous avons fait une première série d'expériences pour fixer approximativement le poids de phosphore qu'un vase déterminé peut contenir à l'état de vapeur à une température donnée : pour cela, nous chauffons rapidement à 360 ou 440 degrés, dans des vases transparents, des poids variables de phosphore. Ces expériences nous ont fourni une première limite inférieure de la tension maximum de la vapeur de phosphore. En prolongeant ensuite l'action de la chaleur sur cette vapeur, nous avons pu la transformer partiellement en phosphore rouge et constater que sa transformation s'arrête quand il s'est établi une tension minimum. Cette seconde partie de l'expérience fournit le poids du litre de la vapeur de phosphore pris sous la pression qui correspond à la tension de transformation, dont on peut aussi calculer la valeur.

La moyenne des expériences faites à 360 degrés nous donne, pour le poids du litre de phosphore resté à l'état de vapeur, après cinq cent quarante heures de chauffe, $0^{gr},285$. La moyenne des expériences faites à 440 degrés nous donne, pour le poids du litre de phosphore resté à l'état de vapeur après trente heures de chauffe, $3^{gr},700$ (1).

On en déduit que la tension de transformation à 360 degrés est $0^{atm},12$, et que la tension de transformation à 440 degrés est $1^{atm},75$.

Les tensions maxima du phosphore à ces températures de 360 et de 440 degrés sont très-supérieures aux tensions de transformation correspondantes, puisque ces dernières ne s'établissent qu'à la suite de la production d'un enduit uniforme de phosphore rouge formé aux dépens de la vapeur. Quant à leur détermination directe, elle présente à ces températures des difficultés particulières. On peut craindre en effet que, par suite de la chaleur dégagée dans la transformation du liquide, il ne se produise une surchauffe. Pour nous mettre à l'abri de cette cause d'erreur, nous avons, dans chaque expérience, mesuré directe-

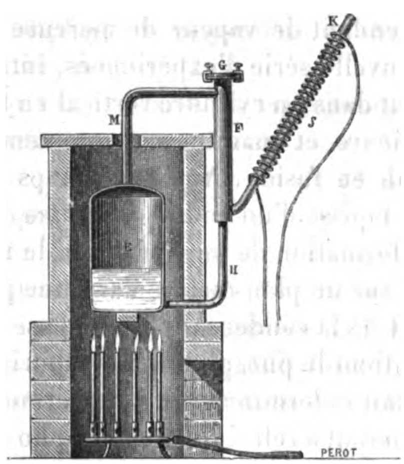
(1) Ce nombre a été obtenu en 1871 par M. G. Lemoine, qui a montré que, contrairement à l'opinion de M. Hittorf, on obtient la même limite en partant du phosphore ordinaire ou du phosphore rouge. Nous avions nous-mêmes établi, dès 1868, que l'on obtient la même valeur pour la tension de transformation de l'acide cyanique, quel que soit celui des isomères qui serve de point de départ.

ment et simultanément la température du phosphore bouillant et la force élastique de sa vapeur. Nous avons ainsi pu constater que, en portant rapidement du phosphore liquide à 360 degrés, il faut, pour l'empêcher d'entrer en ébullition à cette température, exercer sur sa surface une pression de $3^{\text{atm}},2$. Si on le porte de même rapidement à 440 degrés, il faut, pour l'empêcher de bouillir à cette température, une pression de $7^{\text{atm}},5$.

Cette méthode étant d'une application difficile et dangereuse pour des températures plus élevées, nous en avons cherché une autre qui est indirecte, mais plus commode, et nous l'avons appliquée, après avoir vérifié son exactitude en comparant les résultats qu'elle donne à 360 et à 440 degrés avec ceux que nous a fournis la méthode précédente.

Nous chauffons dans un courant de vapeur de mercure ou de soufre un tube vertical (*fig.* 4) terminé à son extrémité inférieure par une ampoule qui contient un poids de phosphore ordinaire un peu supérieur à celui qui peut se vaporiser. Le courant de vapeur de mercure

Fig. 4.



ou de soufre circule de haut en bas, et, par suite, le tube placé en F arrive à la température qu'il doit atteindre et garder pendant toute l'opération, d'abord dans sa partie supérieure, et ensuite de proche en proche, jusqu'à sa partie inférieure.

Après quelques heures de chauffe, le phosphore rouge qui provient

de la transformation du liquide est tout entier dans l'ampoule, et celui qui résulte de la transformation de la vapeur tapisse les parois du tube sous forme d'un enduit uniforme et translucide de couleur rouge pourpre (¹).

La somme des poids de cet enduit et du phosphore resté en vapeur donne le poids total de la vapeur qui s'était formée d'abord, et permet par suite de calculer la force élastique maximum correspondante.

La moyenne des expériences ainsi réalisées nous donne, pour la tension maximum de la vapeur de phosphore à 360 degrés : $3^{atm},2$, et à 440 degrés : $7^{atm},3$.

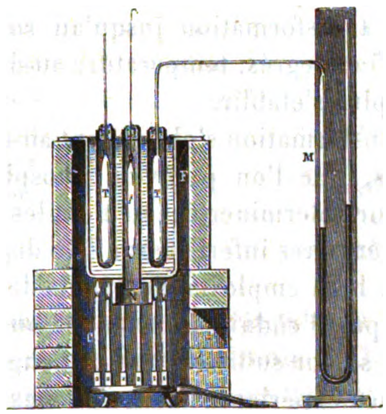
La tension maximum de vapeur d'un corps susceptible de se vaporiser et de se transformer peut donc être mesurée par cette méthode nouvelle aussi exactement que par la méthode directe, à la condition que le produit de la transformation du liquide en excès reste tout entier dans l'ampoule qui termine la partie inférieure du tube scellé dans lequel se fait l'expérience. Pour réaliser à d'autres températures cette même condition de séparation des produits du liquide et de la vapeur, condition que nous remplissions précédemment en chauffant nos tubes par un courant descendant de vapeur de mercure ou de soufre, nous avons, dans notre nouvelle série d'expériences, introduit lentement les tubes t de bas en haut dans un cylindre vertical en fer N (*fig.* 5), fermé par sa partie supérieure et maintenu à une température constante par un bain de plomb en fusion. Après un temps variable, assez long pour que le tube soit tapissé d'un enduit uniforme de phosphore rouge, résultant de la transformation de la vapeur, on le retire rapidement et on le met à refroidir sur un plan incliné dans une position telle, que le phosphore provenant de la condensation se dépose le plus loin possible de l'ampoule qui contient le phosphore non vaporisé.

La température était déterminée par un thermomètre à air T fermé au moment où l'on mettait à refroidir le tube à phosphore. On s'assurait

(¹) Si l'on avait chauffé le tube à la manière ordinaire, dans un bain de liquide ou de vapeur, une portion du phosphore se serait condensée en gouttelettes sur diverses parties du tube ; il eût été alors impossible de séparer le phosphore rouge provenant de la transformation de ces gouttelettes liquides de celui qui provient de la transformation de la vapeur.

de l'invariabilité de la température par un appareil manométrique sensible M communiquant avec un récipient T' plongé dans le plomb fondu.

Fig. 5.



En opérant ainsi, nous sommes arrivés aux résultats suivants :

Les tensions obtenues sont indépendantes de l'excès plus ou moins grand de phosphore employé, tant que l'on opère à des températures qui ne dépassent pas 520 degrés ([1]).

Au-dessus de cette température, la transformation du liquide est trop rapide pour que les tensions maxima aient le temps de s'établir; et même dès 550 degrés, la transformation du phosphore liquide étant plus rapide que sa vaporisation, on ne peut plus obtenir une pression supérieure à la tension de transformation : ce que l'on reconnaît facilement à ce que la vapeur de phosphore émise par le liquide ne change plus d'état; les tubes sont en effet transparents et incolores au moment où on les retire du cylindre moufle; mais le plus léger refroidissement détermine la condensation du phosphore, qui se montre alors en gouttes d'un rouge brun ([2]).

([1]) La transformation du liquide est à toutes ces températures beaucoup plus rapide que celle de la vapeur émise.

([2]) Cette coloration des gouttes attestant la rapide transformation du *liquide* pendant le refroidissement se produit également, quoique d'une manière moins apparente, aux températures inférieures à 540 degrés. La nécessité de maintenir ce phosphore, provenant de la condensation, séparé de celui qui est resté dans l'ampoule explique l'inclinaison que nous

La marche du phénomène ne se modifie pas jusque vers 580 degrés, limite extrême que nous n'avons pu dépasser, la pression que le verre avait à supporter étant de 56 atmosphères (¹).

En résumé, nous avons pu déterminer, par l'emploi de notre appareil, les tensions de transformation jusqu'au rouge, et les tensions maxima jusque vers 520 degrés, température au-dessus de laquelle ces tensions ne peuvent plus s'établir.

Les tensions de transformation s'obtiennent au-dessus de 540 degrés en quelques minutes, que l'on parte du phosphore ordinaire ou du phosphore rouge. Pour déterminer exactement les tensions de transformation pour les températures inférieures à 540 degrés, il faut partir du phosphore rouge, ou bien employer des poids de phosphore tels, que le tube ne présente pas d'enduit au moment où il est retiré du bain métallique, après un séjour suffisamment prolongé.

Les résultats de nos expériences sont résumés dans le tableau suivant :

---

donnons à nos tubes pendant le refroidissement. Cette transformation du phosphore après sa condensation, se produisant déjà à 440 degrés, rend compte de la petite différence que nous avons constatée entre les valeurs obtenues pour la tension maximum par la méthode directe et par notre méthode, quand nous laissions le tube vertical pendant le refroidissement. Le poids de phosphore ordinaire trouvé après un refroidissement très-rapide représente une fraction d'autant plus faible du poids de phosphore réellement vaporisé que le tube a été porté à une température plus élevée. Les tensions de transformation ne pourraient donc être à toutes les températures déterminées par la quantité de phosphore ordinaire persistant après le refroidissement.

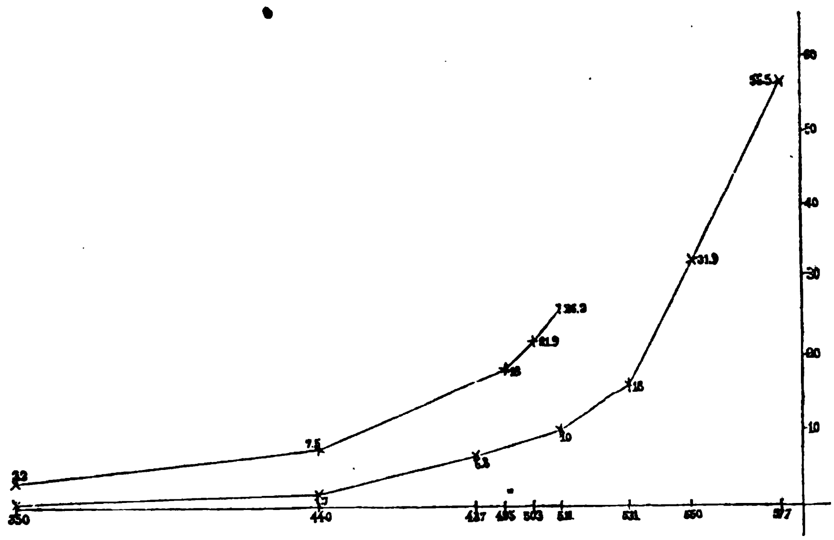
Dans toutes les expériences faites avec le phosphore rouge nous avons toujours constaté que ce phosphore restait pulvérulent; sa nuance seule est modifiée. L'empâtement, quand il se produit, est la conséquence de la transformation du phosphore liquide condensé sur cette poudre lors des variations de la température et surtout lors du refroidissement final, tel qu'il était pratiqué par les chimistes qui se sont occupés de cette étude.

(¹) Le verre étant alors porté au rouge, on doit opérer dans des tubes très-peu fusibles, très-épais et d'un petit diamètre. En maintenant le phosphore à une température très-voisine du ramollissement du verre, on obtient du phosphore rouge à l'état cristallisé. Le phosphore rouge aussi fortement chauffé se présente en masse d'un noir violacé, d'apparence fondue, à cassure conchoïde et translucide sur les bords : c'est dans les cavités de cette matière que les cristaux se montrent d'abord, de façon à rappeler les géodes de quartz hyalin dans les agates.

Température.	Tensions maxima.	Tension de transformation.
°	atm	atm
360	3,2	0,12
440	7,5	1,75
487	»	6,80
494	18,0	»
503	21,9	»
510	»	10,8
511	26,2	»
531	»	16,0
550	»	31,0
577	»	56,0

Nos déterminations montrent que la tension de transformation est, pour chaque température, très-différente de la tension maximum de vapeur correspondante. La courbe des pressions maxima (*fig.* 6) et celle des tensions de transformation construites avec ces valeurs mettent en évidence la parfaite continuité des deux phénomènes.

Fig. 6.

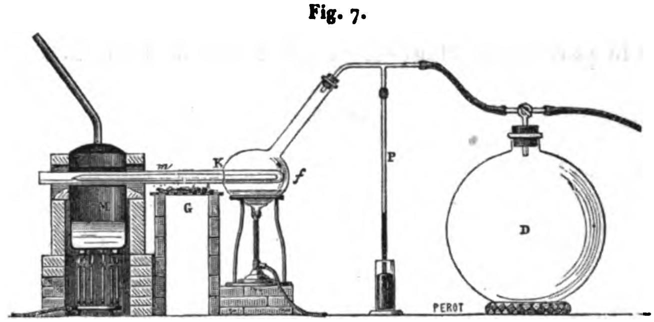


Dans le cours des expériences précédentes, nous avons remarqué que la transformation de la vapeur de phosphore est d'autant plus rapide

que la température est plus élevée. Comme d'ailleurs la tension maximum pour une température donnée est, ainsi que le montre le tableau précédent, supérieure à la tension de transformation pour une température notablement plus élevée, il doit en résulter que si l'on fait arriver dans une enceinte dont les différents points sont à des températures différentes de la vapeur de phosphore ayant la tension maximum correspondant à la température la plus basse, ce sera dans la partie la plus chaude de l'enceinte, et là seulement que devra, dans les premiers moments, se faire, aux dépens de la vapeur, le dépôt de phosphore rouge. Cette conséquence de la rapidité croissante de la transformation de la vapeur avec la température méritait d'être contrôlée par l'expérience; c'est ce que nous avons essayé de réaliser.

La disposition qui nous a le mieux réussi est la suivante : Un tube vide d'air (*fig.* 7), scellé à la lampe et contenant du phosphore rouge en

Fig. 7.



son milieu mK, était chauffé dans cette partie à 500 degrés environ au moyen de la grille G, tandis que les deux extrémités étaient maintenues à des températures différentes et inférieures à 500 degrés. La vapeur provenant du phosphore rouge se répandait dans tout l'espace; elle venait se condenser dans l'extrémité la plus froide f dès que sa tension dépassait la tension maximum répondant à la température de cette partie de l'appareil. Cette dernière tension représente donc la pression de la vapeur dans l'enceinte. L'expérience montre que, si l'on choisit convenablement les deux températures des extrémités, on obtient d'un côté du phosphore liquide, tandis que de l'autre on a une couche mince et uniforme de phosphore rouge provenant de la

transformation directe de la vapeur. De cette manière nous séparons nettement le phénomène physique de la condensation d'une vapeur de celui de sa transformation; la première se manifeste dans les points les plus froids de l'enceinte, la seconde se produit dans l'extrémité opposée plus chaude.

Le tube que nous avons employé avait l'une de ses extrémités chauffée à 350 degrés (vapeur de mercure bouillant), et l'autre à 324 degrés (vapeur de bromure de mercure). Au bout d'une heure trente minutes, la portion du tube portée à 350 degrés présentait un enduit rouge orangé uniforme et translucide, tandis que l'autre extrémité, maintenue à 324 degrés, n'en offrait pas la moindre trace. On n'y voyait que quelques gouttes de phosphore liquide (1).

Dans une autre série d'expériences, nous avons porté l'une des extrémités à 440 degrés (soufre bouillant sous la pression de $0^m,760$), et l'autre extrémité à 420 degrés (soufre bouillant sous la pression de $0^m,470$ mesurée par le manomètre P); on peut, au bout de quinze à vingt minutes, constater l'existence d'un bel enduit rouge dans l'extrémité portée à 440 degrés, et tout au plus une couche jaune extrêmement tenue à 420 degrés. Le sens du phénomène reste donc le même.

Ainsi donc la transformation de la vapeur de phosphore s'effectue, comme celle de la vapeur d'acide cyanique, d'autant plus rapidement que la température est plus élevée, et, comme cette dernière, la transformation se fait sur la *paroi chaude* d'une enceinte à des températures différentes (2).

Les expériences nombreuses et concordantes qui font le sujet de ce Mémoire montrent bien que la transformation d'un liquide et celle de

---

(1) C'est donc bien dans l'extrémité la plus chaude du tube que se produit la transformation de la vapeur, pourvu que l'on maintienne toujours la tension maximum correspondant à la température de l'extrémité la plus froide.

(2) Nous attachons une certaine importance à ce phénomène, quoiqu'il ne soit que transitoire, parce qu'il différencie les transformations isomériques des simples changements d'état physique et nous rappellerons que nous avons les premiers montré que la dissociation pouvait se manifester aussi sur certains points déterminés qui ne sont ni les plus chauds ni les plus froids d'une enceinte à des températures différentes (*voir* nos Recherches sur le sesquichlorure de silicium et la volatilisation apparente du silicium, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIII, p. 443 et 563).

sa vapeur obéissent à des lois complétement différentes; elles établissènt, de plus, une distinction nette entre le phénomène de la transformation allotropique d'une vapeur et celui de sa condensation.

Le phénomène de la vaporisation d'un corps considéré sous deux états physiques différents, comme l'eau et la glace à zéro par exemple, est limité par une seule et même tension de vapeur, tandis que les corps susceptibles de se vaporiser et de se transformer présentent successivement deux tensions différentes correspondant, l'une au phénomène de la vaporisation, l'autre à celui de la transformation.

RECHERCHES

SUR LA

POLARISATION ROTATOIRE MAGNÉTIQUE,

PAR M. E. BICHAT,

AGRÉGÉ-PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

Après des recherches demeurées longtemps infructueuses, Faraday découvrit, en 1845 (¹), que, sous l'influence du magnétisme, certains corps transparents agissent sur la lumière polarisée à la manière du quartz et de certains liquides actifs d'origine organique. Si un rayon de lumière polarisée, dans un plan déterminé, traverse ces corps soumis eux-mêmes à l'action d'un aimant, il en sort polarisé dans un plan qui fait avec le premier un certain angle. On exprime ce fait en disant que tout se passe comme si le plan de polarisation avait tourné, et que les corps soumis à l'expérience jouissent du pouvoir rotatoire magnétique.

Faraday reconnut que cette propriété peut être développée dans tous les corps liquides ou solides monoréfringents, particulièrement dans le verre pesant, et ne peut pas être constatée chez les gaz. Le même physicien ne découvrit aucune relation entre le pouvoir rotatoire magnétique et le pouvoir magnétique, ou diamagnétique, des substances sou-

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XVII, p. 359.

mises à l'expérience. Enfin il montra que la même propriété peut être mise en évidence lorsqu'on place le corps qui en jouit dans l'intérieur d'une bobine traversée par un courant énergique.

Beaucoup de physiciens, après Faraday, étudièrent la même question, et se contentèrent, pour la plupart, de perfectionner les moyens d'observer le phénomène sans en rechercher les lois. C'est ce que firent Pouillet (1), M. Edmond Becquerel (2), M. Boettger (3). M. Becquerel, dans ses expériences, faisait arriver la lumière par un trou percé dans les armatures de l'électro-aimant. Il put, de cette façon, faire agir plus énergiquement les pôles sur la substance que l'on veut étudier. C'est sur ce principe que reposent les appareils que construit maintenant M. Ruhmkorff (4). Faraday avait déjà, d'ailleurs, employé un appareil analogue. Il dit, en effet, au n° 13 de son Mémoire, que, si l'on fait agir sur la substance à étudier deux pôles magnétiques à extrémités ouvertes, c'est-à-dire fournis par des électro-aimants dont les axes sont des cylindres de fer creux, le rayon de lumière passant le long de l'axe, l'effet produit est le même que celui que l'on observe en plaçant le corps entre les pôles d'un électro-aimant en fer à cheval.

Peu de temps après, M. Matthiessen fit connaître un grand nombre de substances, malheureusement, pour la plupart, facilement altérables, jouissant d'un pouvoir rotatoire s'approchant de celui du verre pesant de Faraday (5).

En 1848, M. Bertin signale, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences (6), un grand nombre de faits nouveaux et intéressants. Il donne une relation, rendue ensuite plus générale par Verdet, entre l'action produite par un pôle sur une tranche infiniment mince et la distance de cette tranche au pôle. L'action produite par deux pôles est la somme des actions produites par chacun des pôles agissant séparé-

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXII, p. 135

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XVII, p. 437.

(3) *Poggendorff's Annalen*, t. LXVII, p. 290 et 350.

(4) Décrit dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XVIII, p. 318.

(5) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXIV, p. 969, et t. XXV, p. 20 et 173.

(6) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXVI, p. 24, et *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXIII, p. 5.

ment. M. Bertin indique en outre deux liquides, le bichlorure d'étain et le sulfure de carbone, jouissant d'un pouvoir rotatoire comparable à celui du verre pesant. Dans une seconde Communication (¹), M. Bertin étudie les phénomènes produits lorsque le corps soumis à l'expérience est un parallélépipède de Fresnel, phénomènes qui ne sont pas encore expliqués d'une façon satisfaisante.

Quelque temps après, M. Wiedemann, mesurant l'action produite par une bobine sur des liquides contenus dans des tubes disposés suivant l'axe de cette bobine, découvre une loi importante : *La rotation produite est toujours proportionnelle à l'intensité du courant qui traverse la bobine* (²).

M. Matteucci (³), M. Wertheim (⁴), M. Edlund (⁵), M. Lütdge (⁶) étudièrent l'influence des actions mécaniques et de la chaleur combinées avec l'action du magnétisme. J'indiquerai plus tard, lorsque j'aurai à les discuter, les résultats auxquels ont été conduits ces divers physiciens.

De tous ceux qui se sont occupés de la polarisation rotatoire magnétique, celui qui a le mieux analysé les phénomènes, et qui est arrivé en même temps à des lois certaines, est, sans contredit, Verdet.

Dans un premier Mémoire (⁷), il montra d'abord que, si l'on visse aux extrémités de l'électro-aimant de Ruhmkorff des armatures d'un diamètre *égal à celui de la bobine*, une substance transparente placée dans l'espace intermédiaire acquérait les mêmes propriétés optiques, quelle que fût sa situation, pourvu qu'elle ne fût pas extrêmement voisine de l'une ou de l'autre des armatures. Cet espace peut être appelé *champ magnétique d'égale intensité*. Il démontre ensuite *qu'il y a proportionnalité entre l'action magnétique et la rotation du plan de polarisation*.

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXVII, p. 500.

(2) *Poggendorff's Annalen*, t. LXXXII, p. 216, et *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XXXIV, p. 121.

(3) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XXIII, p. 493, et t. XXIV, p. 354.

(4) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XXVIII, p. 107.

(5) *Annalen der Chemie und Pharmacie*, septembre 1853.

(6) *Poggendorff's Annalen*, t. CXXXVII, p. 271 et *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. XVIII, p. 489.

(7) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XLI, p. 370.

Dans son deuxième Mémoire ([1]), Verdet étudie ce qui se passe lorsque l'angle formé par la direction du rayon de lumière avec la direction de l'action magnétique varie de 0 à 90 degrés, et il trouve que la rotation est proportionnelle au cosinus de cet angle.

Dans un troisième Mémoire ([2]), Verdet démontre que, contrairement à ce que pensait M. de la Rive, il n'y a aucun rapport entre l'ordre des pouvoirs rotatoires magnétiques et l'ordre des indices de réfraction. Dans ce même Mémoire, il étudie les rotations produites par des dissolutions plus ou moins concentrées d'une même substance, et trouve que tout se passe comme dans le cas d'un corps actif dissous dans un liquide actif. Nous aurons occasion de revenir sur ce dernier résultat. Enfin il cherche à établir une relation entre le sens de la rotation produite par certains corps et leurs propriétés magnétiques ou diamagnétiques. Il ne trouve pas de relation intime entre ces deux ordres de phénomènes. Enfin il trouve que certains corps, comme le sulfate de fer, jouissent d'un pouvoir rotatoire négatif, c'est-à-dire que la rotation du plan de polarisation s'effectue dans un sens opposé à celui suivant lequel circule le courant dans la bobine. Pour la plupart des autres corps, le pouvoir rotatoire est positif ([3]).

Enfin, dans un quatrième Mémoire ([4]), Verdet montre que le produit de la rotation par le carré de la longueur d'onde n'est pas un nombre constant ([5]); puis il discute les considérations théoriques présentées

---

([1]) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XLIII, p. 37.

([2]) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LII, p. 129.

([3]) Avant Verdet, M. Bertin avait déjà étudié, dans son premier Mémoire, la rotation des liquides et des dissolutions salines. Il avait constaté un pouvoir très-énergique dans certains liquides anhydres, et avait montré que, dans les dissolutions aqueuses, l'effet observé ne pouvait pas être attribué à l'eau seule, comme le pensait Faraday, puisque cet effet variait avec le degré de concentration de la dissolution. Il remarqua qu'en général la dissolution d'un sel dans l'eau augmente le pouvoir rotatoire de celle-ci, mais il signale deux sels qui, au contraire, la diminuent : ce sont le nitrate d'ammoniaque et le sulfate de fer. Ces résultats doivent être, à mon avis, considérés comme le point de départ des découvertes faites plus tard par Verdet.

([4]) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXIX, p. 415.

([5]) Cette loi de la raison réciproque du carré des longueurs d'ondulations n'était évidemment pas exacte. Cela résultait des travaux faits antérieurement à ceux de Verdet. M. Bertin et M. Becquerel avaient déjà montré, en effet, que la rotation produite par l'action du magnétisme sur un corps transparent peut toujours être compensée par du quartz. Il en résulte

par M. Airy (¹), M. Codazza (²), M. Charles Neumann (³), et montre qu'aucune de ces théories mathématiques ne rend compte des phénomènes observés. Elles sont surtout toutes en contradiction avec ce fait, que la loi de la raison réciproque des carrés des longueurs d'ondulations n'est pas exacte.

En 1868, dans un premier Mémoire (⁴), M. de la Rive reprend les expériences de Matteucci relatives à l'influence des actions mécaniques sur la rotation du plan de polarisation; puis, dans un second Mémoire (⁵), il détermine le pouvoir rotatoire spécifique de quelques liquides, étudie l'influence de la température sur le pouvoir rotatoire des liquides et, enfin, détermine le pouvoir rotatoire de certaines substances isomères. Je ne fais qu'indiquer ici les sujets traités par M. de la Rive. Je donnerai les résultats auxquels il a été conduit lorsque, dans certaines parties de ce travail, j'aurai besoin de m'en servir.

Je me suis proposé, dans le cours de mes recherches, de déterminer l'influence de l'état moléculaire des corps sur le pouvoir rotatoire magnétique. J'ai voulu voir si, en prenant un corps à l'état liquide ou à l'état de dissolution, son pouvoir rotatoire se conserve à l'état solide ou à l'état de vapeur. J'ai commencé par rechercher les meilleures conditions à remplir pour que l'on puisse opérer avec le plus de rapidité possible, et en même temps avec le plus de précision. C'est le résultat de ces recherches que je développerai dans la première partie de ce travail.

---

que la quatrième loi de Biot, relative aux carrés des longueurs d'onde, loi qui, depuis longtemps, était reconnue inexacte, ne pouvait pas non plus s'appliquer rigoureusement à la rotation magnétique. C'est ce que Verdet a vérifié.

(¹) *Philosophical Magazine*, 3ᵉ série, t. XXVII, p. 469.

(²) *Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo*, t. XIV, année 1853.

(³) *Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur*. Halis Saxonum, 1858.

(⁴) *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. XV, p. 57.

(⁵) *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. XXII, p. 5.

Examen de différentes méthodes, au moyen desquelles on peut mesurer le pouvoir rotatoire.

Ces méthodes sont au nombre de cinq :
1° Emploi de la teinte de passage;
2° Emploi de la plaque à deux rotations;
3° Méthode de Lütdge;
4° Emploi du nicol coupé;
5° Méthode de MM. Fizeau et Foucault.

1° *Emploi de la teinte de passage.* — Les conditions les meilleures pour opérer avec précision au moyen de cette méthode ont été établies par Verdet (premier Mémoire, p. 11). Ces conditions étant remplies, on peut, si l'on opère avec la lumière solaire, mesurer la rotation relative à la teinte de passage à trois ou quatre minutes près. Ce procédé jouit donc d'une grande sensibilité lorsqu'on opère avec la lumière solaire. Dans le cas où l'on ne peut pas avoir cette lumière à sa disposition, le procédé ne comporte plus aucune précision. Je n'ai jamais pu, même après avoir acquis une longue habitude dans ce genre de mesures, obtenir des résultats avec une erreur absolue moindre que quinze à vingt minutes.

2° *Emploi de la plaque à deux rotations.* — Cette méthode est bonne, commode, rapide, lorsqu'une grande précision n'est pas nécessaire, et lorsque la substance que l'on étudie n'est pas colorée. L'observation se fait au moyen d'une petite lunette de Galilée, pointée sur la plaque à deux rotations. Avec la lumière des nuées, on peut mesurer la rotation avec une erreur absolue moindre que douze minutes. C'est là, en comparaison des résultats donnés par les autres méthodes, l'erreur la plus faible que l'on puisse commettre lorsqu'on n'a pas la lumière solaire à sa disposition. Si l'on emploie la lumière Drummond, il faudra modérer convenablement l'arrivée de l'oxygène et du gaz de l'éclairage, de telle façon que la flamme soit bien blanche. Dans ce cas, on peut obtenir une sensibilité un peu plus grande qu'avec la lumière des nuées;

mais, en général, on ne pourra pas répondre de commettre une erreur moindre que huit minutes.

3° *Méthode de Lütdge* (¹). — Avec une lumière vive, la lumière solaire, on peut, avec un spectroscope ordinaire, obtenir par cette méthode des mesures ne différant pas de plus de douze minutes. Si l'on concentre la lumière solaire sur la fente d'un spectroscope, au moyen d'une lentille, ou bien si l'on remplace la fente par le foyer d'une lentille cylindrique, le procédé devient plus sensible, et l'on peut répondre alors de quatre à cinq minutes.

Avec la lumière Drummond, la méthode ne présente plus une sensibilité suffisante, ce qui tient au défaut de parallélisme des rayons. Les lectures diffèrent quelquefois de vingt minutes.

4° *Emploi du nicol coupé.* — Avec cet instrument, on est obligé d'employer de la lumière homogène. Le meilleur moyen de s'en procurer est de placer, sur le trajet de la lumière blanche, un verre rouge, ou bien une petite cuve contenant une solution de sulfate de cuivre dans le carbonate d'ammoniaque. Cette solution, prise sous une faible épaisseur, ne laisse passer que des rayons indigo très-voisins de la raie G. Le verre rouge est moins bon, parce qu'il fournit des rotations qui sont beaucoup plus faibles, et, par suite, son usage conduit à des erreurs relatives plus considérables. Le nicol coupé présente un grand avantage sur le nicol ordinaire. Avec ce dernier, en effet, on doit juger, par comparaison, deux teintes dont l'une est visible et dont l'autre a disparu. Avec le nicol coupé, au contraire, on a à juger de l'égalité de deux teintes, toutes les deux visibles, ce qui est certainement beaucoup plus facile. Pour le nicol ordinaire, on doit opérer avec la lumière solaire. Avec le nicol coupé, on peut employer la lumière Drummond. Pour opérer avec précision, il est encore nécessaire de viser avec une lunette pointée sur la section du nicol. Dans ces conditions, avec la lumière Drummond, on peut être assuré que les mesures ne différeront pas plus de cinq minutes.

(¹) *Poggendorff's Annalen*, t. CXXXVII, p. 271.

5° *Méthode de MM. Fizeau et Foucault.* — Cette méthode a déjà été étudiée avec grand soin et perfectionnée par M. Gernez (¹). En prenant les précautions qu'il indique, on peut être certain d'opérer en ne commettant pas, même dans les cas les plus défavorables, une erreur absolue supérieure à dix minutes.

Dans toutes ces expériences, le prisme analyseur est monté dans un appareil formé de deux cercles concentriques, le premier fixe avec le support et divisé en degrés et tiers de degré, l'autre mobile avec l'analyseur et portant deux verniers opposés donnant la minute.

En résumé, si l'on a la lumière solaire à sa disposition, il faudra employer la méthode de Lütdge, ou se servir de la teinte de passage, à moins que l'on n'ait besoin de mesurer les rotations relatives aux différentes raies du spectre, auquel cas la méthode de MM. Fizeau et Foucault devra être utilisée. Avec la lumière des nuées, on doit employer la plaque à deux rotations, et réserver le nicol coupé pour le cas où l'on se servira de la lumière Drummond. Comme remarque générale, j'ajouterai que, dans ce genre de mesures, ce n'est qu'après avoir acquis une grande habitude que l'on peut arriver à obtenir des résultats comportant toute la précision possible.

Étude des variations de l'action magnétique avec l'intensité du courant et la tension de la pile.

L'intensité du phénomène que l'on observe en plaçant entre les pôles de l'appareil de Ruhmkorff une substance transparente, que traverse un rayon de lumière polarisée, dépend de la masse de l'électro-aimant, du diamètre du fil, et du rapport qui existe entre les dimensions de l'électro-aimant et l'énergie du courant qui l'excite. De plus, avec une pile donnée, la grandeur de la rotation dépend de la manière dont les éléments sont disposés. Il vaut mieux toujours, comme l'a fait déjà remarquer M. Bertin (²), augmenter la quantité que la tension.

(¹) *Annales scientifiques de l'École Normale*, 1ʳᵉ série, t. I, p. 1.
(²) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XXIII.

Je me suis proposé de chercher :

1° Comment varie la rotation ou l'action magnétique avec l'intensité du courant d'une pile disposée en tension ([1]);

2° Quelle est, avec une pile donnée, la meilleure disposition à adopter dans l'arrangement des éléments pour que la rotation soit la plus grande possible.

I. Dans le premier cas, il faut, pour résoudre la question, mesurer d'une part la rotation, et d'autre part l'intensité du courant qui la produit. Le corps soumis à l'expérience était un morceau de flint commun à faces parallèles et non trempé. Il était placé entre les pôles de l'électro-aimant de Ruhmkorff, muni de ses grosses armatures, de telle façon que la rotation fût indépendante de la position du morceau de flint.

Le courant qui excitait l'électro-aimant passait d'abord dans l'intérieur d'une très-grosse bobine creuse, placée très-loin de l'électro-aimant, dans une salle voisine. On fait agir cette bobine sur un barreau aimanté très-court, mobile et horizontal, placé à une distance assez grande pour que l'action sur chaque pôle puisse être considérée comme ayant la même grandeur et la même direction, lorsque l'axe du barreau est dans le plan du méridien magnétique, ou lorsqu'il est dévié d'un angle quelconque. L'angle dont le barreau est dévié permet, comme l'a montré Verdet ([2]), de déduire l'intensité du courant, ou plutôt on peut, connaissant cet angle, trouver le rapport des intensités des courants qui traversent la bobine à deux moments quelconques. On peut aussi se servir des phénomènes de la polarisation rotatoire magnétique, non-seulement pour mesurer l'intensité de l'action magnétique développée dans un

---

([1]) L'action magnétique qui varie proportionnellement à la quantité de magnétisme est en raison inverse du carré de la distance. Si donc on mesure l'action magnétique, on mesure, par cela même, la quantité de magnétisme qui lui est proportionnelle, ou bien encore le moment magnétique.

([2]) Soient f la composante horizontale de l'action de la bobine sur l'un des pôles du barreau aimanté, ω l'angle de cette composante avec le plan du méridien magnétique, T la composante horizontale de l'action terrestre; le barreau aimanté se placera en équilibre dans une position faisant, avec le plan du méridien magnétique, un angle α déterminé par la relation

$$T \sin\alpha = f \sin(\omega - \alpha);$$

si l'on change la direction du courant sans changer son intensité, on observera une nouvelle

électro-aimant par le passage du courant, mais encore pour mesurer l'intensité du courant lui-même. Supposons, en effet, que, dans l'intérieur de la grosse bobine que nous faisions agir tout à l'heure sur un barreau aimanté, nous placions un tube fermé par des glaces parallèles, et contenant un liquide jouissant du pouvoir rotatoire magnétique. Si nous faisions passer dans ce liquide un rayon de lumière polarisée, la rotation du plan de polarisation produite par l'action du courant sera, comme l'a montré M. Viedemann, proportionnelle à l'intensité de ce courant. Il suffira donc de mesurer, à deux moments différents, d'une part, la rotation pour l'appareil installé dans la bobine et, d'autre part, la rotation produite par l'interposition du flint entre les pôles de l'appareil de Ruhmkorff, pour avoir le rapport cherché entre l'intensité du courant et le moment magnétique.

Le second procédé est moins précis que le premier. Supposons, en effet, qu'au moyen de la règle divisée et du miroir on ait mesuré une

---

position d'équilibre α' définie par l'équation

$$T \sin\alpha' = f \sin(\omega + \alpha');$$

de ces deux équations, on déduit facilement

$$f = \frac{2T}{\sin\omega}\,\frac{\tang\alpha . \tang\alpha'}{\tang\alpha + \tang\alpha'}.$$

A partir de ce moment, Verdet continue à développer les équations rigoureuses du problème, et, plus tard seulement, par une série d'approximations successives, il arrive à la formule définitive. Il m'a semblé plus simple de faire, dès maintenant, les approximations permises, et d'abréger de cette façon les calculs.

Les angles α et α' étaient toujours extrêmement petits : ils n'ont jamais dépassé 1 degré. On pourra donc, sans erreur appréciable, remplacer $\tang\alpha$ et $\tang\alpha'$ par α et α'. Alors la formule précédente devient

$$f = \frac{2T}{\sin\omega}\,\frac{\alpha\alpha'}{\alpha + \alpha'}.$$

Les déviations étaient mesurées au moyen d'une règle divisée et d'un miroir, la règle étant placée à une distance $h = 2^m$ de l'aimant. Soient x et x' les déplacements de l'image réfléchie de la règle, correspondant aux deux directions opposées du courant, on aura

$$\tang 2\alpha = \frac{x}{R}, \quad \tang 2\alpha' = \frac{x'}{R},$$

ou approximativement

$$\alpha = \frac{x}{2R}, \quad \alpha' = \frac{x'}{2R};$$

rotation représentée par le nombre $120^{mm},6$. On peut évaluer le $\frac{1}{4}$ d'une division de telle sorte que le nombre exact serait au minimum $120^{mm},35$, et l'erreur relative serait au maximum $\frac{0,25}{120,35} > \frac{1}{482}$. Le même courant donnerait, pour le tube placé dans la bobine et rempli de sulfure de carbone, une rotation de $12°20' = 740'$. On peut commettre une erreur absolue de 5 minutes dans les cas les plus favorables. Par suite, l'erreur relative serait toujours supérieure à $\frac{1}{149}$ et, par conséquent, plus grande que dans le cas précédent.

Le premier procédé devra donc être exclusivement employé.

Je réunis dans les tableaux suivants les résultats auxquels j'ai été conduit. La première expérience a été faite avec l'électro-aimant de Ruhmkorff; la seconde a été faite avec la bobine qui sert d'ordinaire à mettre en évidence les phénomènes fondamentaux de l'induction. Cette

---

remplaçant, il vient

$$f = \frac{T}{R \sin\omega} \frac{xx'}{x + x'}.$$

Pour une intensité différente f_1, on aura de même

$$f_1 = \frac{T}{R \sin\omega} \frac{x_1 x'_1}{x_1 + x'_1},$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \frac{f}{f_1} = \frac{xx'}{x_1 x'_1} \frac{x_1 + x'_1}{x + x'},$$

formule identique avec celle à laquelle arrive Verdet. Si l'on supposait l'intensité du courant simplement proportionnelle à $(x + x')$, on aurait la formule

$$(2) \qquad \frac{f}{f_1} = \frac{x + x'}{x_1 + x'_1}.$$

Ces deux formules conduisent à des résultats presque identiques, en supposant que x et x' ne dépassent pas une certaine limite, 150 millimètres par exemple, et que x_1 et x'_1 ne soient pas inférieurs à une certaine valeur, 50 millimètres. En disposant la bobine à une distance convenable de l'électro-aimant, il sera toujours facile de remplir ces conditions. Par exemple, dans une de mes expériences, j'avais $x = 150^{mm}$, $x' = 155^{mm}$, $x_1 = 50^{mm}$, $x'_1 = 53^{mm}$. En employant la formule (1), on trouve $\frac{f}{f_1} = 2,9616$. En employant la seconde, on a $\frac{f}{f_1} = 2,9611$, nombres différant très-peu l'un de l'autre. On pourra donc supposer l'intensité du courant simplement proportionnelle à $(x + x')$.

bobine contenait un cylindre de fer de 63 millimètres de diamètre, percé dans le sens de son axe.

Première expérience.

Intensité.	Action magnétique.	Rapport.
36	70'	1,944
66	108	1,636
92	140	1,521
121	164	1,355
144	182	1,263
166	198	1,192
189	210	1,111
211	222	1,052
226	230	1,017
241	236	0,979
257	244	0,949
269	248	0,921
278	254	0,913
293	258	0,880
300	260	0,866
323	266	0,823
379	280	0,738
401	284	0,708
500	298	0,596
592	304	0,513

Deuxième expérience.

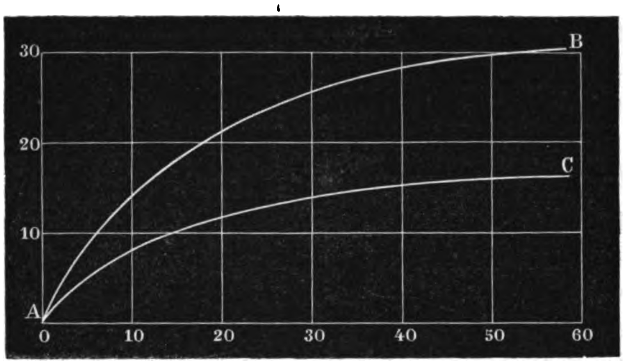
Intensité.	Action magnétique.	Rapport.
23	32	1,391
60	58	0,966
102	80	0,784
196	114	0,581
252	128	0,507
294	138	0,469
416	154	0,370
472	158	0,334
551	162	0,294
583	162	0,277

On voit immédiatement que, dans les conditions dans lesquelles j'ai

opéré, il n'y a aucune proportionnalité entre l'intensité du courant et l'action magnétique. Cette proportionnalité, qui n'existe, comme cela a été démontré, que pour un courant extrêmement faible, cesse de se manifester aussitôt que le courant devient un peu énergique. Le rapport entre l'action magnétique et l'intensité va en décroissant avec une très-grande rapidité.

Si l'on construit une courbe dont les abscisses représentent l'intensité du courant, et les ordonnées l'action magnétique, on voit que cette courbe AB (*fig.* 1), construite d'après les données de la première expérience, s'écarte beaucoup de la ligne droite à laquelle elle se réduirait

Fig. 1.



s'il existait réellement un rapport constant entre les deux quantités dont il s'agit. D'après la forme de cette courbe, il est évident que l'intensité du courant croissant indéfiniment, l'action magnétique tend vers une limite qu'elle ne peut dépasser.

Avec l'électro-aimant de Ruhmkorff, cette limite n'a pas été atteinte, mais j'y suis arrivé avec la bobine avec laquelle a été faite la seconde expérience. J'avais à ma disposition 120 éléments Bunsen, ayant déjà servi pendant une heure la veille, et dans lesquels l'eau acidulée n'avait pas été remplacée. Je fis passer le courant de 60 éléments dans le fil de l'électro-aimant, et je mesurai la rotation produite par l'action de l'un des pôles, sur un long tube plein de sulfure de carbone. Cette rotation fut trouvée égale à 3°40′. Faisant passer ensuite le courant des 120 éléments, la rotation fut trouvée la même et égale encore à 3°40′. Le phénomène peut être projeté. Il suffit, pour cela, de placer entre les deux

prismes analyseur et polariseur une plaque à deux rotations, dont on projette l'image sur un écran, au moyen d'une lentille. On fait passer d'abord le courant des 60 éléments, et l'on tourne le nicol analyseur de manière que les deux côtés de la plaque aient la même teinte gris de lin. On lance ensuite le courant de 120 éléments, et la teinte n'a pas changé d'une manière sensible.

La courbe qui représente les variations de l'action magnétique avec l'intensité du courant, lorsqu'on opère avec cette dernière bobine, est représentée suivant AC (*fig.* 1). La bobine et le barreau aimanté servant à la mesure de l'intensité étaient disposés de la même façon que lorsqu'on opérait avec l'électro-aimant de Ruhmkorff.

II. Les expériences précédentes montrent que, à partir d'une certaine limite, on n'augmente presque plus l'action magnétique, bien que l'on continue à augmenter l'intensité du courant. Il est donc convenable, au point de vue de la pratique, de rechercher quel est le nombre d'éléments que l'on doit employer pour obtenir une rotation du plan de polarisation qui approche suffisamment du maximum que peut fournir l'électro-aimant pour que l'on puisse considérer comme superflu et dispendieux d'en monter un plus grand nombre. L'expérience a été faite avec l'électro-aimant de Ruhmkorff, dans lequel on lançait successivement le courant fourni par 1, 2, 3,... éléments Bunsen, grand modèle, montés avec des acides n'ayant pas encore servi, et des zincs neufs, parfaitement amalgamés. Le corps soumis à l'expérience était un flint lourd. La rotation alla en croissant, assez rapidement, jusqu'au moment où l'on atteignit le chiffre de 10 éléments. De 10 à 20, la rotation croît encore, mais bien moins, et, à partir de 20 éléments, l'augmentation se fait d'une façon insensible. Ainsi, dans une expérience, la rotation était de 55 minutes pour 1 élément; de 4°50′ pour 20, et n'était que de 5°30′ pour le courant de 48 éléments. Dans une autre expérience, 41 éléments donnaient 6°40′, 20 éléments donnaient 12°20′ et 80 éléments 15°2′ : 20 éléments, au plus, sont donc tout ce qu'il faut pour exciter l'électro-aimant de Ruhmkorff dans toutes les expériences relatives à l'action du magnétisme sur la lumière.

Il peut être préférable de disposer ces éléments en quantité plutôt que de les disposer en tension. La résistance d'une pile varie, en effet,

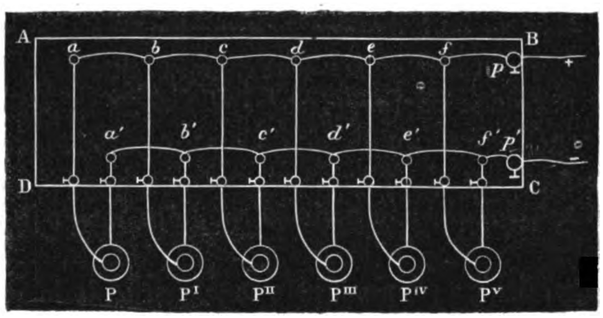
avec la disposition des éléments, et l'on sait que le meilleur effet est obtenu lorsque la résistance de la pile est égale à la résistance du circuit. Pour résoudre cette question, il eût donc fallu mesurer, d'une part, la résistance de la pile disposée de différentes façons, et, d'autre part, la résistance du circuit; mais, la résistance de la pile changeant à chaque instant, et surtout d'un jour à l'autre, ces déterminations n'auraient pas été très-utiles au point de vue de la pratique. Il m'a paru préférable de séparer la pile en 1, 2, 4 autres de 20, 10, 5 éléments, de réunir ensuite les pôles de même nom des différentes piles, et de lancer le courant dans la bobine. Les résultats obtenus de l'expérience sont contenus dans le tableau suivant :

Nombre des éléments.	Surface.	Rotation.	Augmentation.
20	1	6°,10	
	2	7,40	1°,30
	4	7,25	1,15

La disposition qui donne les meilleurs résultats consiste donc à réunir par des pôles de même nom deux piles de 10 éléments.

Pour arriver à réunir ainsi les pôles de même nom d'un certain nombre de piles et, en même temps, pour ranger ces piles d'une façon quelconque, la disposition qui m'a paru la plus simple est la suivante : sur une planche ABCD (*fig.* 2), on creuse une série de trous *a*, *b*, *c*, *d*,....

Fig. 2.



Diagonalement au-dessous, on creuse un nombre égal de trous *a'*, *b'*, *c'*, *d'*,.... Ces trous sont pleins de mercure. Les pôles positifs des piles P,

P′, P″,... sont mis en communication avec des bornes ou des pinces communiquant elles-mêmes avec la première série de trous, et les pôles négatifs sont, de même, mis en communication avec la seconde série a', b', c', d',.... Pour réunir les pôles de même nom des différentes piles, il suffira de réunir entre eux les trous supérieurs, et les trous inférieurs également entre eux, au moyen de gros fils ou de lames métalliques. Les derniers trous de chaque série communiquent eux-mêmes avec des bornes p et p', qui constituent les pôles de la pile ainsi formée.

En réunissant les trous inférieurs aux trous supérieurs en diagonale, on pourra évidemment former toutes les combinaisons que l'on pourra désirer.

Influence des actions mécaniques sur le pouvoir rotatoire magnétique.

L'étude de cette influence a déjà été faite par plusieurs physiciens. Matteucci, Edlund, Wertheim s'étaient occupés surtout de l'influence des actions mécaniques qui modifient l'état moléculaire du corps traversé par la lumière polarisée. M. de la Rive étudia l'effet produit par la décharge d'une bobine de Ruhmkorff, et trouva que le verre soumis à cette décharge avait perdu son pouvoir rotatoire magnétique; mais que, par contre, il était devenu biréfringent. Ces mêmes décharges ne paraissent avoir aucune influence sur le pouvoir rotatoire des liquides. Il me semble que ces résultats pouvaient être prévus, du moment, en effet, que la décharge de la bobine de Ruhmkorff ne change pas la constitution chimique du liquide sur lequel on la fait agir; ce liquide, un instant agité par cette décharge, reprend bientôt sa position d'équilibre, reste identique à ce qu'il était d'abord et parfaitement homogène dans toutes ses parties. Le liquide n'ayant absolument pas changé, il est donc tout naturel que son pouvoir rotatoire magnétique n'ait pas changé non plus.

Pour le verre, il n'en est pas ainsi : la décharge de la bobine a pour effet de lui enlever son homogénéité, de le rendre biréfringent, et cela d'une façon permanente. Or, si l'on place un tel verre entre deux nicols, on aperçoit des couleurs, et quelquefois seulement des lignes noires.

Dans le second cas, la rotation peut encore être mesurée. Les lignes noires ne gênent nullement : elles servent de points de repère. Dans le premier cas, au contraire, le pouvoir rotatoire qui peut encore exister ne peut plus être mis en évidence, parce que, pour observer un changement notable dans les couleurs du verre, il faut donner au plan de polarisation une rotation plus grande que celle qui peut lui être imprimée par l'électro-aimant.

J'ai voulu voir si ce pouvoir rotatoire ne serait pas modifié lorsqu'on soumettrait à un mouvement de rotation extrêmement rapide, soit dans le sens suivant lequel agit le courant, soit en sens inverse, un tube contenant une substance active placé suivant la ligne des pôles de l'électro-aimant. Des expériences analogues avaient déjà été faites sur les liquides naturellement actifs ; elles avaient conduit à des résultats négatifs. Je m'attendais à être amené aux mêmes conclusions dans le cas où la substance ne devient active que sous l'action du magnétisme. J'ai néanmoins tenté l'expérience, parce que j'avais à ma disposition un appareil qui me permettait de la faire dans les meilleures conditions possibles. Cet appareil avait été construit avec beaucoup de soin par M. Froment pour d'autres expériences. Le tube contenant le liquide est fermé par des glaces parallèles; il est soutenu par un système de quatre roues disposées de telle façon, que l'axe du tube reste parfaitement immobile, tandis qu'un point de sa surface est animé d'une vitesse extrêmement grande. Le mouvement est produit au moyen d'une manivelle et transmis au tube par un système d'engrenages très-simple, disposé de telle façon que, la manivelle faisant un tour, le tube en fait environ cinq cents. L'expérience a d'abord été faite avec le tube vide, puis avec le tube plein de sulfure de carbone. La rotation produite par les glaces seules, le tube étant en repos, était de $0°10'$. La rotation produite par le tube plein de sulfure de carbone était de $6°30'$. En imprimant à la manivelle et, par suite, au tube le mouvement de rotation le plus rapide possible, soit dans le sens dans lequel circule le courant, soit en sens inverse, il a été impossible de découvrir aucun changement apporté à la valeur de la rotation.

Conservation du pouvoir rotatoire magnétique d'une même substance dans les deux états de solidité et de simple dissolution.

Dans son second Mémoire, M. Bertin, étudiant le pouvoir rotatoire magnétique des solutions salines, remarque que certains corps, comme le protochlorure d'étain, augmentent le pouvoir rotatoire de l'eau, et que d'autres sels, au contraire, comme le sulfate de fer, le diminuent. L'augmentation ou la diminution est, d'ailleurs, d'autant plus grande que la proportion de sel dissous est elle-même plus considérable. Verdet reprit ces expériences, et, dans son troisième Mémoire, il calcule la rotation que donnerait le sel en le considérant comme un corps actif dissous dans un liquide également actif. Il trouve que les nombres fournis par le calcul et ceux auxquels conduit l'expérience sont identiques, ou tout au moins que l'écart que l'on observe est de l'ordre des erreurs de mesures.

Je me suis proposé de rechercher certains corps que l'on puisse obtenir en même temps à l'état de corps solides transparents et à l'état de dissolution dans l'eau. Il ne fallait pas songer à se servir des corps cristallisés biréfringents; cette classe de corps a été étudiée déjà par Faraday, qui ne constata aucune action, puis par M. Bertin et M. Becquerel, qui n'ont pu y développer qu'un pouvoir rotatoire extrêmement faible. Le corps qui d'ailleurs se serait le mieux prêté aux expériences eût été l'eau, que l'on peut obtenir en masse transparente beaucoup plus considérable que les corps dont se servaient les deux physiciens que je viens de citer. En soumettant une épaisseur de glace considérable à l'action de l'électro-aimant, on avait donc plus de chances qu'avec tout autre corps de découvrir le pouvoir rotatoire des cristaux biréfringents.

Pour connaître les conditions dans lesquelles on opère, il est nécessaire de déterminer la direction de l'axe du cristal; or cela ne présente aucune difficulté en opérant de la façon suivante : on prend le bloc de glace et on le scie dans différentes directions, de manière à obtenir des plaques de petite épaisseur à faces parallèles que l'on place sur le porte-

objet du microscope polarisant. Lorsque l'on observe des anneaux non déformés traversés par une croix noire, et cela d'une façon bien nette, on est sûr que la plaque est taillée perpendiculairement à l'axe. Alors il suffit de scier le bloc de glace dans une direction parallèle à celle qui a fourni la plaque précédente pour avoir une plaque également perpendiculaire à l'axe. Pour que le morceau de glace puisse servir aux observations optiques, il suffit alors de l'user un peu en le frottant sur un plan de verre. Pour obvier aux irrégularités pouvant provenir de la fusion de la glace et de l'écoulement de l'eau, il suffit d'entourer le morceau de glace d'une feuille de clinquant, dépassant ses extrémités de quelques centimètres et recouverte elle-même de glace mélangée avec un peu de sel. Le morceau de glace ainsi préparé, étant placé entre les pôles de l'électro-aimant de Ruhmkorff, je n'ai pu observer aucune trace de polarisation circulaire magnétique. Avec un morceau de glace taillé parallèlement à l'axe, le résultat est le même. Quelle que fût la grandeur de l'action magnétique, son influence sur le rayon polarisé traversant le morceau de glace fut toujours nulle.

Il ne fallait donc pas songer à se servir de cristaux biréfringents. Parmi les corps monoréfringents, il en est deux qui se présentent tout naturellement à l'esprit, parce qu'on peut les obtenir facilement bien transparents dans une épaisseur assez grande : ce sont l'alun et le sel gemme. Or ces deux corps, soumis à l'action de l'électro-aimant, donnent une rotation bien nette, mais très-faible. Il en résulte que l'effet produit par ces corps dans les dissolutions aqueuses sera le même, extrêmement faible et, par suite, difficilement appréciable.

Les corps cristallisés ne pouvaient donc que difficilement servir au but que je me proposais. J'ai pensé alors à rechercher des corps que l'on pût obtenir à l'état solide transparent et en même temps amorphe. Cette classe de corps est extrêmement restreinte. Après un grand nombre de recherches infructueuses, je me suis arrêté au sucre et à l'acide tartrique, qui jouissent, à l'état amorphe, d'un pouvoir rotatoire magnétique comparable à celui de l'eau, et, par suite, suffisant pour les expériences que je voulais faire. J'ai donc préparé avec beaucoup de soin des dissolutions de sucre et d'acide tartrique, contenant des proportions variables de la substance dissoute. Les corps servant à ces expériences avaient été préalablement fondus et coulés en plaques. C'est avec des

fragments de ces plaques que l'on préparait les différentes dissolutions.

Pour arriver à fondre facilement le sucre et l'acide tartrique, de manière à obtenir des plaques amorphes et transparentes, il est nécessaire de prendre certaines précautions, indiquées déjà par Biot, et que je ne crois pas inutile de rappeler.

Lorsqu'il s'agit de l'acide tartrique, on commence par réduire l'acide cristallisé en poudre excessivement fine, puis on l'introduit dans un ballon ou matras de verre, au fond duquel on a mis à l'avance quelques gouttes d'eau. Si l'on ne mettait pas d'eau, l'acide obtenu serait toujours fortement coloré, de telle façon que, même sous une petite épaisseur, il ne serait pas transparent. L'eau que l'on ajoute a pour but de former, avec la partie inférieure de la poudre d'acide tartrique, une dissolution très-concentrée, qui permet aux couches supérieures de fondre sans recevoir directement l'action de la chaleur par l'intermédiaire du verre. On chauffe au moyen d'un fourneau à bois ou d'un fourneau à gaz recouvert d'une toile métallique, en ayant soin de tourner constamment le matras autour de son axe. De cette manière, les différentes parties des parois sont également chauffées, et les proportions de la matière qui touchent ces parois changent à chaque instant. On continue de cette manière jusqu'au moment où, dans toute la masse liquide, on n'aperçoit plus aucune trace de matière solide. Arrivé à ce moment, on continue à chauffer encore, de manière à chasser en grande partie l'eau que l'on a ajoutée et à s'assurer que la liquéfaction est complète. On voit alors une grande quantité de bulles s'élever du sein de la masse liquide. On laisse refroidir : les bulles cessent peu à peu de paraître, et bientôt on n'en aperçoit plus qu'à la surface. A ce moment, on en coule une partie dans un flacon de verre préalablement chauffé dans une étuve, de manière que le flacon soit plus que plein. On abandonne ce flacon à un refroidissement extrêmement lent, et, au bout d'un certain temps, il est complétement plein d'acide tartrique solidifié à la température de 10 degrés. Alors on nivelle l'acide à l'orifice du goulot. On pèse le flacon ainsi rempli, on le pèse rempli d'eau distillée, puis vide, et, de ces expériences, on conclut le poids spécifique de l'acide tartrique amorphe, qui fut trouvé égal à 1,6809.

L'expérience avec l'acide tartrique fut répétée plusieurs fois. Avec

un peu d'habitude, on parvient à opérer de telle façon que la densité de l'acide ainsi préparé diffère très-peu de celle que nous venons d'indiquer. Elle a toujours été comprise entre 1,678 et 1,682.

On peut opérer de la même manière pour obtenir le sucre fondu; mais alors il est extrêmement difficile d'obtenir une masse solidifiée suffisamment transparente. Malgré des essais multipliés, je n'ai pu obtenir, la plupart du temps, qu'une substance plus ou moins colorée en jaune; une seule fois, la coloration fut assez faible pour permettre une observation optique un peu précise. Le meilleur moyen à employer est le suivant: le sucre, finement pulvérisé, était dissous dans une petite quantité d'eau et à la solution, on ajoutait quelques gouttes d'acide acétique. On continuait à chauffer jusqu'au moment où l'on avait un sirop très-épais qui, étiré en fils minces, se solidifiait immédiatement. On coulait alors le sirop dans les vases où l'on voulait le recueillir. En opérant avec précaution, on pouvait, de cette façon, obtenir des masses transparentes sensiblement incolores. On détermine la densité du sucre ainsi fondu de la même façon que celle de l'acide tartrique; elle fut trouvée égale à 1,51. En déterminant la densité du sucre dans l'essence de térébenthine par le procédé ordinaire, on arrive au même nombre.

Dans chacun de ces cas, on versait une partie des corps fondus dans des cuves en verre préalablement chauffées, de manière que l'on n'eût pas de rupture à craindre en versant le liquide chaud. Ces cuves avaient 31 millimètres de longueur; elles étaient formées d'un cylindre en verre percé de deux trous voisins, pouvant être fermés au moyen de bouchons en verre. Ce cylindre était enveloppé par une garniture en cuivre, dont une partie avait été enlevée au point où se trouvent les trous, de manière à permettre l'introduction du liquide dans la cuve. Les extrémités étaient fermées par deux plaques de verre très-mince, que l'on pressait sur le cylindre au moyen d'une plaque de cuivre, percée d'un trou et fixée à la garniture par huit petites vis.

Le liquide versé dans les cuves se solidifiait, et, en bouchant les trous, on pouvait le conserver longtemps dans cet état. Dans le cas de l'acide tartrique, on apercevait toujours au milieu de la masse solide quelques petites bulles qui dépolarisaient la lumière qui les traversait; mais, tout autour, on pouvait toujours trouver certaines plages que la

lumière polarisée traversait sans subir de modifications de cette nature.

Les dissolutions, une fois préparées, étaient placées dans des cuves identiques à la première et de même longueur. On plaçait successivement toutes ces cuves entre les pôles de l'électro-aimant, et l'on mesurait la rotation produite par chacune d'elles.

Pour ces expériences, l'électro-aimant avait été muni de ses grosses armatures cylindriques, dont le diamètre est égal à celui de la bobine. De cette manière, lorsqu'on enlevait une cuve pour remplacer une dissolution par une autre, il n'était pas nécessaire de la remettre rigoureusement à la même place : il suffisait que ses extrémités ne fussent pas trop près des armatures.

Pour mesurer la rotation, je me suis servi de la teinte de passage et du soleil, lorsque je l'avais à ma disposition. Dans les autres cas, je me suis servi du nicol coupé.

Pendant la durée d'une expérience, le courant et, par suite, l'action magnétique pouvaient varier. On en tenait compte de la façon suivante : on faisait une première mesure de la rotation α produite par un flint déterminé placé entre les pôles, puis on mesurait l'action produite par la cuve. On replaçait ensuite le flint, et l'on mesurait la nouvelle rotation α'. Le nombre $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$ représentait alors l'action magnétique au moment où la cuve était placée entre les pôles de l'électro-aimant. Toutes les expériences avaient été faites de la même façon, et les rotations mesurées étaient toutes ramenées à ce qu'elles auraient été si l'action magnétique était demeurée constante et constamment égale à $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$.

Inutile enfin de dire que, dans tous les cas, on tenait compte de la rotation, d'ailleurs extrêmement faible, produite par les lames de verre fermant les cuves et du pouvoir rotatoire naturel de la substance à étudier.

Toutes ces précautions étant prises, les mesures de rotation furent faites pour toutes les dissolutions et pour les corps solides contenus dans des cuves identiques. Pour voir si le pouvoir rotatoire observé dans le cas du corps solide se conservait dans la dissolution, il fallait

comparer les pouvoirs rotatoires observés directement avec ceux que fournit la théorie. Ces derniers étaient calculés de la façon suivante :

Soient δ_1 et δ_2 les densités propres de la substance dissoute et de l'eau à la température à laquelle on opère; α_1 et α_2 les rotations produites sous l'action d'un même courant par chacun de ces corps contenus dans des cuves de même longueur L. On prend un poids P_1 du premier corps et un poids P_2 du second, puis on les mélange. Il en résulte un liquide de densité δ, qui produit, dans une cuve de même longueur L et sous l'action d'un même courant que précédemment, une rotation α.

On trouve facilement entre ces quantités la relation suivante :

$$\alpha_1 \frac{P_1}{\delta_1} + \alpha_2 \frac{P_2}{\delta_2} = \alpha \frac{P_1 + P_2}{\delta},$$

équation qui permet, connaissant deux des rotations, de calculer la troisième. Dans une première série d'expériences, j'ai calculé α rotation de la dissolution, et je l'ai comparée à la rotation trouvée par l'expérience. Dans une seconde série, j'ai effectué la même comparaison pour α_1, c'est-à-dire pour la rotation produite par le corps à l'état solide.

Les résultats relatifs au sucre sont contenus dans les tableaux suivants :

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Observations faites au moyen de la teinte de passage.

Température	10 degrés.
Densité de l'eau	$\delta_2 = 0,999731$.
Densité du sucre	$\delta_1 = 1,51$.
Rotation produite par le sucre fondu	$\alpha_1 = 1^\circ 35'$.
Rotation produite par l'eau	$\alpha_2 = 1^\circ 6'$.

P_1	P_2	δ	α observé.	α calculé.	Différence.
10	90	1,0412	$1^\circ.9' = 69'$	68',404	− 0',596
20	80	1,0846	1.11 = 71	70,910	− 0,090
30	70	1,1302	1.13 = 73	73,530	+ 0,530
40	60	1,178	1.15 = 75	76,248	+ 1,248
50	50	1,228	1.20 = 80	79,111	+ 0,889
60	40	1,2803	1.22 = 82	82,072	+ 0,072
100	0	1,512	1.35 = 95	94,999	− 0,001

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Observations faites au moyen du nicol coupé.

Température...........................	11 degrés.
Densité de l'eau.........................	$\delta_2 = 0,999527$.
Densité du sucre.........................	$\delta_1 = 1,512$.
Rotation produite par l'eau...........	$\alpha_2 = 2°3'$.
Rotation produite par le sucre.............	$\alpha_1 = 3°$.

P_1	P_2	δ	α observé.	α_1 observé.	α_1 calculé.	Différence.
10	90	1,0412	2°.8'	3° = 180'	184',13	+ 4',13
20	80	1,0846	2.12	180	175,80	− 4,20
30	70	1,1302	2.18	180	181,258	+ 1,25
40	60	1,178	2.20	180	170,135	− 9,865
50	50	1,228	2.27	180	175,913	− 4,087
60	40	1,2803	2.35	180	181,62	+ 1,62
100	0	1,512	3	180	180,0	+ 0

Les tableaux précédents montrent que l'accord entre les rotations calculées et les rotations observées est aussi parfait que possible. Une seule des différences que l'on remarque dans le second tableau est un peu supérieure à l'erreur que l'on peut commettre en faisant les mesures.

Toutes les expériences faites avec les dissolutions d'acide tartrique fondu donnent des résultats ne différant pas sensiblement les uns des autres; il me suffira d'en citer une seule conduisant aux nombres contenus dans le tableau suivant :

EXPÉRIENCE SUR L'ACIDE TARTRIQUE.

Observations faites au moyen de la teinte de passage.

Température...........................	12 degrés.
Densité de l'acide tartrique fondu..........	$\delta_1 = 1,6809$.
Densité de l'eau.........................	$\delta_2 = 0,999285$.
Rotation produite par l'eau................	$\alpha_2 = 1°54'$.
Rotation produite par l'acide fondu.........	$\alpha_1 = 1°35'$.

P_1	P_2	δ	α observé.	α_1 observé.	α_1 calculé.	Différence.
16	84	1,0752	1°.54'	95'	97',49	+ 2',49
28	72	1,1420	1.52	95	95,6	+ 0,6
44	56	1,230	1.49	95	94,43	— 0,57
100	0	1,68	1.35	95	95	+ 0

Biot avait remarqué, en étudiant le pouvoir rotatoire naturel des dissolutions d'acide tartrique *cristallisé*, que le pouvoir rotatoire moléculaire de l'acide tartrique calculé va en augmentant à mesure que la proportion d'eau augmente. Rien de semblable ne se manifeste ici avec l'acide tartrique *fondu* soumis à l'action du magnétisme ; tout se passe comme dans le cas du sucre, comme si le corps actif était simplement dissous dans l'eau. Les différences que l'on observe dans les nombres calculés et observés sont tout à fait de l'ordre des erreurs de mesures.

Nous pouvons donc dire que, *pour les deux corps étudiés et probablement pour les autres corps que l'on soumettra à l'expérience dans des circonstances analogues, le pouvoir rotatoire magnétique se conserve intégralement dans le passage de l'état de solidité à l'état de simple dissolution.*

Influence de la température sur le pouvoir rotatoire magnétique.

I. *Corps solides.* — Les seules expériences faites sont dues à Matteucci et à Lütdge ; elles sont contradictoires.

Matteucci, chauffant un flint dans un bain d'huile et le portant ensuite entre les pôles de l'appareil de Faraday, trouve que la rotation produite par l'action d'un même courant a considérablement augmenté par suite de l'élévation de température.

Lütdge, au contraire, en opérant au moyen d'un appareil spécial, qui lui permettait de chauffer le verre en même temps que l'on faisait une observation, trouve que la rotation diminue à mesure que la température s'élève.

Il est facile de voir que la méthode employée par Matteucci ne présente aucune précision. Le flint, retiré du bain d'huile et porté sans précaution entre les pôles de l'électro-aimant, présentait forcément des

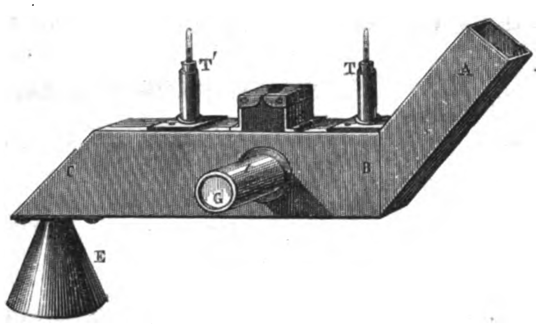
phénomènes de trempe, qui devaient singulièrement modifier et fausser les observations optiques. J'ai répété cette expérience, et j'ai vu, en effet, que le verre donnait des couleurs qu'une rotation assez grande de l'analyseur parvenait à peine à changer. Si l'on se bornait à une seule expérience, on pourrait être induit en erreur; mais si l'on répète plusieurs fois la même opération, en chauffant toujours à la même température, on s'aperçoit que les valeurs trouvées pour les rotations ne sont nullement constantes, et que, par suite, le procédé d'observation ne vaut rien. Pour avoir quelque chose de précis, il faut empêcher la trempe et, par suite, le refroidissement brusque du morceau de verre. On peut y parvenir de la façon suivante : on entoure le parallélépipède de flint de plusieurs doubles de feuilles de clinquant, de manière que ces feuilles dépassent de chaque côté de quelques centimètres. De cette façon, l'air qui arrive en contact avec le verre est échauffé, par suite de son passage entre les feuilles de clinquant.

De plus, le parallélépipède pouvait être plongé dans le bain d'huile ou en être retiré au moyen de fils de cuivre fixés aux feuilles de clinquant. On évitait ainsi de presser le morceau de verre avec des pinces, ce qui pouvait déjà lui donner une certaine trempe. Dans ces conditions, le phénomène de trempe est à peu près insensible, et un morceau de flint qui, à la température ordinaire, donnait une rotation de 6°10′ ne donnait plus, après avoir été chauffé, qu'une rotation de 5°50′. La rotation était donc devenue moindre; mais, de cette façon, on ne savait absolument rien sur la valeur de la température à laquelle la seconde observation avait été faite.

Pour obtenir des résultats plus précis et pouvoir suivre les variations de la rotation avec la température, je me suis servi d'une étuve à air chaud, qui avait déjà servi à M. Des Cloizeaux pour d'autres expériences. C'est un tube parallélépipédique ABC (*fig.* 3), terminé en E par un entonnoir au-dessous duquel on place un brûleur. L'air chauffé par le bec de gaz vient sortir en A. En G, le tube est percé de deux ouvertures opposées, fermées par des glaces parallèles. C'est entre ces glaces que l'on place le morceau de verre soumis à l'expérience. De chaque côté se trouvent deux thermomètres T et T′ indiquant la température. Au commencement, la température indiquée par T′ est toujours supérieure à celle indiquée par T; puis elles se rapprochent de plus en plus

l'une de l'autre, et il arrive un moment où elles sont identiques; on peut les conserver telles pendant un temps très-long, plus que suffisant pour être bien sûr que le verre a pris la température de l'air qui l'entoure. En élevant ou abaissant un peu le gaz au-dessous de E, ou bien en changeant la source de chaleur, on peut d'ailleurs faire varier cette température et l'élever jusqu'à 150 degrés.

Fig. 3.



Pour tenir compte de l'action produite par les glaces seules, il eût fallu faire une expérience à blanc, et noter la rotation, extrêmement faible, produite par ces glaces aux différentes températures; puis il eût fallu, dans les expériences suivantes, chauffer l'étuve exactement à la même température, ce qui eût été extrêmement difficile. De plus, l'erreur commise sur les lectures donnant la rotation du morceau de verre se serait trouvée compliquée des erreurs commises dans les mesures de la rotation des glaces. Une seule expérience a été faite de cette façon et n'a donné rien de précis. Dans les autres cas, l'appareil a été modifié de la façon suivante : à la place des glaces, on vissait deux tubes assez longs pour que leurs extrémités pussent pénétrer dans l'intérieur des armatures de l'électro-aimant, et c'est à ces extrémités que l'on fixait les glaces.

Ces dernières, se trouvant dans l'intérieur d'un aimant creux, ne subissaient plus aucune influence de la part de cet aimant. (Une substance jouissant d'un pouvoir rotatoire magnétique même considérable ne donnerait également rien, si on la plaçait dans l'intérieur d'un aimant creux.) Immédiatement après chaque mesure, on enlevait l'étuve, et l'on mettait à sa place un flint à la température ordinaire. Ce flint

servait à mesurer l'action magnétique, et toutes les observations étaient rapportées à ce qu'elles auraient été si l'action magnétique était demeurée courante.

Les mesures étant faites, j'ai voulu voir s'il y avait une relation entre les rotations mesurées et les densités du verre aux mêmes températures. Pour cela, j'ai calculé, d'après les coefficients de dilatation connus, les rapports des volumes du verre aux différentes températures. Ce rapport était égal au rapport inverse des densités. On trouvera dans les tableaux suivants les résultats auxquels j'ai été conduit :

Expériences sur le flint commun (méthode de Lütdge).

Température.	Rotation.	Rapport des densités.	Rapport des rotations.
14°	1°.30′		
98	1.26	0,999314	0,95555
140	1.24	0,998972	0,93333

Expériences sur le verre ordinaire (méthode de Lütdge).

Température.	Rotation.	Rapport des densités.	Rapport des rotations.
13°	45′		
80	41	0,99938	0,92222
100	39	0,999198	0,86666
150	38	0,9987	0,84444

On voit, d'après ces expériences, que la rotation diminue à mesure que la température augmente, et, si l'on prend le rapport des densités, on voit qu'il est toujours plus fort que le rapport des rotations. La rotation diminue donc plus vite que la densité, à mesure que la température augmente.

II. *Liquides.* — Les variations du pouvoir rotatoire magnétique des liquides avec la température ont été étudiées par M. de la Rive. Il a trouvé que, pour certains liquides très-dilatables, comme l'alcool, l'iodure d'éthyle, l'alcool amylique, le rapport des rotations est sensiblement le même que le rapport des densités, mais que ce rapport ne reste pas du tout constant lorsqu'il s'agit de liquides relativement peu dilatables, comme l'eau et l'acide sulfurique.

Les expériences que j'ai faites, et que je ne cite que parce que le mode d'expérimentation est plus commode et plus précis, confirment ces résultats et les étendent à d'autres liquides.

M. de la Rive opérait sur des liquides renfermés dans un tube entouré d'un manchon plein d'eau, que l'on échauffait au moyen d'une lampe à alcool. Ce manchon était placé entre les pôles de l'électro-aimant de Ruhmkorff.

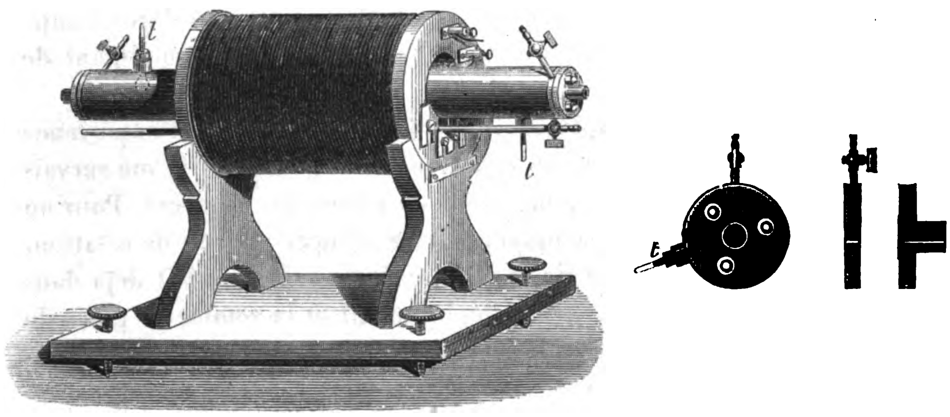
J'ai voulu essayer d'employer le même procédé; mais, l'expérience étant toujours assez longue, les variations de la pile dont je me servais étaient trop considérables pour que l'on puisse les négliger. Pour en tenir compte, il eût fallu remplacer, après chaque mesure de rotation, le tube par un parallélépipède de flint, comme je l'avais fait déjà dans d'autres expériences; mais ici le déplacement et la remise en place du tube chaud, dont les extrémités étaient engagées dans les armatures de l'électro-aimant, étaient très-difficiles et avaient l'inconvénient d'interrompre les expériences. J'ai voulu éviter ces inconvénients en employant le moyen suivant : devant l'un des pôles extrêmes de l'électro-aimant, je plaçais un flint et je mesurais la rotation produite. Si cette rotation avait été à chaque instant proportionnelle à celle que l'on aurait obtenue en mettant le tube, rempli d'un liquide quelconque, entre les pôles de l'électro-aimant, on aurait eu un moyen commode de corriger les erreurs provenant de la variation du courant; mais l'expérience montre qu'une pareille proportionnalité n'existe pas; par suite, le procédé doit être rejeté.

Si l'on tenait absolument à se servir de l'électro-aimant, il faudrait employer une pile assez forte pour que l'on fût voisin du maximum d'aimantation. Dans ces conditions, des variations, même assez fortes, de l'intensité du courant sont, comme nous l'avons vu, sans effet sensible sur l'action magnétique. Il est probable que c'est dans ces conditions qu'opérait M. de la Rive, car il regardait l'effet produit par l'aimant comme constant. Un autre inconvénient de la méthode de M. de la Rive, c'est que, en chauffant le tube à double enveloppe avec une lampe à alcool, on ne pouvait obtenir une température restant constante pendant longtemps.

Pour étudier le phénomène avec plus de commodité et de précision, il m'a paru plus convenable d'opérer de la façon suivante : dans l'in-

térieur d'une grosse bobine (*fig.* 4), on place, suivant l'axe, le tube contenant le liquide à étudier. Ce tube était formé d'un cylindre en

Fig. 4.



cuivre, entouré par un autre, d'un diamètre quatre fois plus grand, contenant de l'eau ou de l'huile. Des thermomètres placés dans des tubulures, dont était munie l'enveloppe, indiquaient à chaque instant la température. Une rampe de becs de gaz était placée au-dessous. Les ouvertures de ces becs pouvaient être augmentées ou diminuées à volonté, et un robinet permettait de régler l'arrivée du gaz. Deux feuilles de clinquant recourbées étaient placées au-dessus des extrémités du tube dépassant la bobine, de manière à éviter les courants d'air. De cette façon, il était possible d'obtenir une température constante, à $\frac{1}{2}$ degré près, pendant tout le temps qu'on voulait.

Aux extrémités du tube se trouvaient d'abord deux rondelles, portant deux tubulures munies de robinets. Ces tubulures permettaient d'introduire les liquides et de diriger au dehors les vapeurs, qui quelquefois étaient pénibles à respirer. Par-dessus ces rondelles, on en plaçait deux autres dans lesquelles étaient mastiquées deux glaces fermant le tube intérieur. Ces dernières rondelles portaient de plus un petit prolongement cylindrique, destiné à empêcher le dépôt de buée sur les glaces, lorsque la température du tube devient inférieure à celle de la salle dans laquelle on opère; enfin les rondelles étaient pressées contre l'extrémité du manchon au moyen de trois forts boulons.

La bobine dont je me servais était la même qui avait été employée par Verdet dans quelques-unes de ses expériences. Elle était formée par un cylindre en bois de 158 millimètres de diamètre intérieur, recouvert de deux fils parallèles de $2^{mm},6$ de diamètre. Le poids du fil était de 125 kilogrammes. La longueur de la bobine était de 49 centimètres, et celle du tube de 91 centimètres. Le tube dépassait donc les extrémités de la bobine de 42 centimètres, soit 21 centimètres de chaque côté, de telle façon que l'action sur les glaces pouvait être considérée comme nulle ou inappréciable, ce que démontrait d'ailleurs l'expérience directe.

Chaque fois, avant et après chaque expérience, on mesurait l'intensité du courant en faisant agir la bobine sur un barreau aimanté, disposé comme je l'ai déjà indiqué. Les rotations étant, dans les circonstances dans lesquelles on opère, proportionnelles à l'intensité du courant, il était facile de les ramener, par une simple proportion, à ce qu'elles auraient été si l'intensité avait été constante. C'est ce qui a été fait chaque fois.

J'ai opéré en employant successivement l'eau, le sulfure de carbone et le bichlorure d'étain.

Dans le cas de l'eau, j'ai été conduit aux mêmes conclusions que M. de la Rive. La diminution du pouvoir rotatoire magnétique se fait d'une manière beaucoup plus rapide que la diminution de la densité; par exemple, le rapport des rotations de l'eau à 60 et à 10 degrés était égal à 1,043; le rapport des densités aux mêmes températures n'est que 1,0170. Les nombres que j'ai trouvés étant complétement d'accord avec ceux donnés par M. de la Rive, je crois inutile d'en donner ici le tableau. Je me contenterai de donner les résultats auxquels m'ont conduit l'étude du bichlorure d'étain et du sulfure de carbone.

Dans chaque cas, j'ai calculé la rotation que l'on devrait observer, en supposant le rapport des rotations égal au rapport des densités. Les densités m'ont été données par les tables de M. Isidore Pierre. Le sulfure de carbone employé avait été distillé plusieurs fois sur du chlorure de calcium, jusqu'au moment où la température d'ébullition fût devenue constante et égale à 48 degrés sous la pression 756 millimètres. Le bichlorure d'étain entrait en ébullition à $115°,5$ sous la pression 754 millimètres.

SULFURE DE CARBONE.

Observations faites au moyen de la teinte de passage.

Température.	Rotation mesurée.	Différence de température.	Rapport des densités.	Rotation calculée.	Différence.
0°	16°10′			16°10′	0′
9	16. 2	9° — 0°	1,010369	16. 0	+ 2
15	15.50	15 — 9	1,0068	15.54	— 4
22	15.45	22 — 15	1,0083	15.47	— 2
30	15.40	30 — 22	1,0094	15.39	+ 1
41	15.20	41 — 30	1,00121	15.28	— 8
48	14.10	48 — 41	1,0084	15.20	— 1°10

BICHLORURE D'ÉTAIN.

Observations faites au moyen du nicol coupé.

Température.	Rotation mesurée.	Différence de température.	Rapport des densités.	Rotation calculée.	Différence.
0°	25°55′			25°54′	+ 1′
5	25.45	5° — 0°	1,005687	25.46	— 1
11	25.34	11 — 5	1,0057	25.38	— 4
20	25.20	20 — 11	1,01115	25.21	— 1
40	24.42	40 — 20	1,236	24.46	— 4
49	24.22	49 — 40	1,01204	24.28	— 6
80	23.28	80 — 49	1,038	23.36	— 8
100	22.40	100 — 80	1,027	23. 0	—20
115	21. 0	115 — 100	1,021	22.30	— 1° 30

D'après les tableaux qui précèdent, et d'après ce que nous avons trouvé dans le cas du verre et de l'eau, d'après les expériences de M. de la Rive sur l'eau et l'acide sulfurique, on voit que, bien que la diminution de la densité soit la principale cause qui fasse décroître le pouvoir rotatoire magnétique à mesure que la température s'élève, il ne paraît pas que cette cause soit unique. Pour le bichlorure d'étain, les écarts que l'on observe sont de l'ordre des erreurs d'observation jusqu'à la température de 49 degrés; mais, à partir de ce moment, ces

écarts deviennent de plus en plus considérables jusqu'à la température d'ébullition 150 degrés. Aux environs de cette température, la diminution du pouvoir rotatoire devient très-considérable par rapport à la diminution de la densité. Il faut remarquer aussi que pour ce corps toutes les différences sont négatives, ce qui montre que, même aux températures les moins élevées, le pouvoir rotatoire a une tendance à diminuer plus vite que la densité. Pour le sulfure de carbone, liquide plus dilatable que le bichlorure d'étain, l'accord entre les résultats du calcul et ceux de l'observation est plus satisfaisant. Jusqu'à 40 degrés les écarts ne dépassent pas l'ordre des erreurs d'observation; mais ici encore, aux environs du point d'ébullition, on remarque une diminution beaucoup plus rapide du pouvoir rotatoire.

En résumé, on peut dire que, pour les corps les plus dilatables, l'accord entre le rapport des densités et le rapport des rotations est satisfaisant pour des températures qui ne sont pas très-voisines de la température d'ébullition. Pour les corps moins dilatables, la diminution de la densité ne suffit plus pour rendre compte de la diminution du pouvoir rotatoire : il faut encore admettre que l'effet moléculaire est par lui-même moins énergique quand la température s'élève.

Dans les expériences précédentes, le tube contenant le liquide pouvait augmenter de longueur, mais cela ne pouvait en aucune façon fausser les résultats obtenus, puisque le tube dépassait la bobine d'une longueur plus que suffisante pour que le courant fût sans action sur les dernières couches de la substance. Ces dernières pouvaient donc s'éloigner sans que la longueur de la colonne liquide, influencée par la bobine, fût changée.

III. *Comparaison des rotations relatives aux raies du spectre à différentes températures.* — Dans son quatrième Mémoire, Verdet mesure les rotations relatives aux différentes raies du spectre et trouve que le produit de la rotation par le carré de la longueur d'onde va en croissant à mesure que la longueur d'onde diminue. Aux différentes températures, il doit en être ainsi; car toujours la rotation peut être compensée au moyen d'un quartz.

La loi de dispersion restant constante, il doit arriver que, à deux températures différentes, il y a un rapport constant entre les rotations

relatives aux différentes raies du spectre : c'est ce que j'ai voulu vérifier.

La méthode employée est celle de MM. Fizeau et Foucault, modifiée par M. Gernez. Le tube dont je me servais est celui que j'ai précédemment décrit. Il était toujours placé dans l'intérieur de la grosse bobine. L'expérience durant ici un certain temps et le liquide pouvant être échauffé, soit par le courant qui l'enveloppe, soit par le rayon solaire qui le traverse, il était nécessaire de modifier assez souvent la position du robinet laissant arriver le gaz, de manière que la température ne s'élevât pas. En prenant cette précaution, on pouvait être sûr que la température ne variait pas d'une façon sensible pendant le temps nécessaire à la mesure de la rotation relative à une raie donnée. Enfin, après chaque mesure de rotation, on tenait compte des changements qui avaient pu survenir dans la valeur de l'intensité du courant. Les résultats obtenus sont contenus dans le tableau suivant :

SULFURE DE CARBONE.

Température.	Raies.	Rotation.	Rapport des rotations.
0°	C	21° 44'	»
	D	28.10	»
	E	36.40	»
	F	45.10	»
	G	62.20	»
30°	C	20.50	1,0432
	D	27.10	1,0368
	E	35.20	1,0377
	F	43.40	1,0381
	G	60. 0	1,0402
40°	C	20.38	1,0473
	D	26.54	1,0464
	E	34.50	1,0501
	F	43.10	1,0502
	G	59.28	1,0496

Du tableau qui précède il faut conclure que le rapport des rotations pour les différentes raies du spectre, à deux températures différentes, reste toujours le même quelle que soit la raie considérée. Ce dernier

résultat est certain, bien que l'on remarque une différence entre les divers rapports. Il est facile de s'en convaincre de la façon suivante : prenons, par exemple, le rapport des rotations mesurées à zéro et à 30 degrés. La différence des nombres les plus éloignés est

$$1,0432 - 1,0368 = 0,0064.$$

L'erreur relative est donc

$$\frac{0,0064}{1,0432} = \frac{64}{10432} = \frac{1}{163}.$$

L'erreur relative du dividende ou du diviseur sera donc $\frac{1}{326}$. Si la valeur de la rotation est 40 degrés, l'erreur absolue sera $\frac{40^\circ}{326} = \frac{2400'}{326}$ ou environ sept minutes, erreur qui n'est pas considérable sur une rotation de 40 degrés.

La considération des nombres relatifs à l'autre température conduirait aux mêmes conclusions.

Expériences sur les vapeurs.

Le pouvoir rotatoire magnétique de certains corps, comme le sulfure de carbone, paraît se conserver à mesure que la température augmente. Sauf aux environs du point d'ébullition, le rapport des densités est égal au rapport des rotations. Il m'a paru intéressant de chercher si ces mêmes corps conservent encore leurs propriétés au point de vue de l'action du magnétisme lorsqu'ils sont réduits à l'état de vapeur.

Faraday avait déjà cherché à mettre en évidence le pouvoir rotatoire magnétique des corps qui existent à l'état gazeux à la température ordinaire, comme l'oxygène, l'azote, l'acide sulfureux, l'ammoniaque, etc. Il opérait en se servant, pour contenir les gaz, de flacons de 4 pouces de diamètre. Il obtint toujours des résultats négatifs. Il était permis de supposer que, si l'on opérait sur des masses de gaz plus considérables, ces gaz ayant une densité plus grande que ceux dont se servait Faraday et étant soumis à une action magnétique plus énergique,

on pourrait constater chez ces corps le pouvoir rotatoire magnétique; c'est pourquoi j'ai entrepris ces expériences.

Je dois dire tout d'abord que les nombreux essais que j'ai faits, dans le but de découvrir le pouvoir rotatoire magnétique des vapeurs, ont été jusqu'à présent infructueux; néanmoins je crois utile d'entrer dans le détail des expériences que j'ai tentées, en indiquant les conditions qui m'ont paru les meilleures pour trouver ce que je cherchais.

La première chose à faire, avant de mesurer la rotation, étant de voir si elle existait, il fallait pour cela évidemment agir sur la plus grande colonne de vapeur possible. Or j'avais à ma disposition la grosse bobine dont j'ai déjà parlé, l'électro-aimant de Ruhmkorff et l'électro-aimant ayant servi à M. Vertheim. Dans l'intérieur de la grosse bobine, je plaçai le grand tube à double enveloppe. Aux extrémités, je fis agir sur ce même tube les deux parties de l'électro-aimant de Vertheim, et, à la suite, je plaçai l'électro-aimant de Ruhmkorff, entre les pôles duquel se trouvait un autre tube à double enveloppe, chauffé comme le premier au moyen d'une rampe de bec de gaz. Les deux tubes étaient remplis de bichlorure d'étain liquide qui, à la température de 100 degrés, donnait une rotation de 45 degrés pour le grand tube et de 20 degrés pour le petit, en tout 65 degrés. On peut encore doubler la rotation ainsi obtenue en employant le procédé suivant, indiqué pour la première fois par M. Bertin. La lumière polarisée tombe sur une glace étamée, inclinée à 45 degrés sur l'axe du tube, traverse le tube et vient se réfléchir normalement sur une autre glace, qui force le rayon de lumière à revenir sur ses pas et à traverser une seconde fois la substance soumise à l'expérience; puis ce rayon lumineux traverse la première glace en un point où l'étamage a été enlevé et est reçu par l'analyseur. Une précaution à prendre consiste à parfaitement dessécher le tube avant d'introduire le liquide, qui, sans cela, se décomposerait en donnant sur les glaces un dépôt d'acide stannique, lequel rendrait l'observation difficile, sinon impossible.

J'avais choisi le bichlorure d'étain de préférence à tout autre liquide, parce qu'il jouit, par lui-même, d'un pouvoir rotatoire magnétique considérable, et que, d'un autre côté, il possède une grande densité de vapeur. En continuant à chauffer le tube, il arrive un moment où le bichlorure d'étain se réduit en vapeur; cette vapeur s'échappe par

l'une des tubulures, puis est condensée. Quand le tube est arrivé à être rempli ainsi à moitié par le liquide et à moitié par la vapeur, on pourrait croire *a priori* qu'il est possible de comparer d'un seul coup la rotation produite par la vapeur et la rotation produite par le liquide à la même température ; mais, dans la pratique, cela n'est pas possible, du moins avec les tubes dont je me servais, et qui avaient 2 centimètres de diamètre : la ligne de séparation du liquide et de la vapeur n'est jamais nette; elle est toujours plus ou moins ondulée et ces ondulations du liquide apportent dans la vision un trouble qui ne permet plus d'opérer avec précision.

Dans le cas où le pouvoir rotatoire eût été moléculaire, on pouvait calculer à l'avance la rotation produite par la vapeur dans l'expérience précédente. La densité du bichlorure d'étain à 150 degrés étant 1,98, et celle de la vapeur à la même température et à la pression de 765 millimètres, à laquelle se faisait l'expérience, étant 0,00859, la rotation de la vapeur sera donnée par la relation suivante :

$$\frac{x}{2 \times 65^\circ} = \frac{0,00859}{1,98}, \quad x = 33',8.$$

Or une première fois l'expérience me donna 30 minutes; sans aller plus loin, je conclus à l'existence du pouvoir rotatoire des vapeurs, et je m'arrangeai de manière à pouvoir mesurer la rotation produite avec plus d'exactitude que je ne pouvais le faire avec l'appareil précédent, où les variations du courant ne pouvaient être évaluées. La bobine avec laquelle ont été faites plusieurs de mes expériences était certainement l'instrument le plus commode; j'installai donc le tube dans la bobine. A l'une des extrémités, je plaçai une glace inclinée à 45 degrés de l'axe, et à l'autre extrémité une autre glace qui forçait le rayon lumineux à revenir sur ses pas avant d'arriver à l'analyseur, et je fis arriver dans ce tube, parfaitement desséché, des vapeurs de bichlorure d'étain. A mon grand étonnement, j'eus beau lancer dans la bobine le courant produit par 120 éléments Bunsen, je ne constatai plus aucune action de ce courant sur la lumière polarisée; cependant ce même tube, plein de bichlorure liquide, donnait une rotation de 35 degrés, et, par suite, à l'état de vapeur, j'aurais dû observer une rotation de 16 à 17 minutes. Je répétai plusieurs fois cette expérience, et chaque fois je fus conduit au

même résultat négatif. La première expérience était donc mal faite, ou plutôt il s'était glissé alors une cause d'erreur que je n'avais pas aperçue, ce qui tenait à ce que le résultat que je trouvais était précisément celui que j'attendais. Je recommençai cette première expérience et je m'aperçus immédiatement que ce qui avait causé mon erreur tenait à ce que les glaces du tube, placées entre les pôles de l'électro-aimant de Ruhmkorff, probablement inégalement pressées par suite de la dilatation du tube de cuivre, étaient légèrement trempées. Je remplaçai les glaces par d'autres, puis je supprimai en même temps les deux glaces servant à faire traverser deux fois l'appareil par la lumière polarisée, parce qu'une réflexion même, sous l'incidence normale, altère la nature de la lumière. Après avoir chauffé l'appareil, traversé par un courant d'acide carbonique, et m'être assuré que les glaces n'étaient plus trempées, je remplaçai le gaz carbonique par la vapeur de bichlorure d'étain, et je ne constatai plus aucune action. Je cherchai alors d'autres liquides jouissant d'un pouvoir rotatoire comparable à celui du bichlorure d'étain, et ayant en même temps une densité de vapeur considérable. Parmi les nombreux corps que j'ai soumis à l'expérience, il en est un, non encore signalé, qui remplit très-bien les conditions requises : c'est le bromure de silicium. A l'état liquide, il jouit d'un pouvoir rotatoire considérable. Le sulfure de carbone donnant une rotation de 40 degrés, le bromure de silicium donne, dans les mêmes circonstances, une rotation de 34 degrés. La densité de vapeur est elle-même très-élevée : elle est voisine de 13 par rapport à l'air. Avec la vapeur de ce liquide, je n'ai pu observer encore aucune action.

Il faut donc conclure de ce qui précède que les corps qui, à l'état liquide, jouissent du pouvoir rotatoire magnétique, ne conservent pas cette propriété à l'état de vapeur, ou tout au moins que ce pouvoir rotatoire, s'il existe, est de beaucoup inférieur à celui que l'on calcule, en supposant qu'il dépende seulement de l'écartement plus ou moins grand des molécules.

RÉSUMÉ.

1° Le pouvoir rotatoire que certains corps acquièrent sous l'influence du magnétisme permet d'étudier avec beaucoup de facilité le rapport qui existe entre le moment magnétique d'un électro-aimant et l'intensité du courant qui l'excite. Les expériences faites avec cette méthode montrent que, pour chaque électro-aimant, il existe un maximum d'aimantation que l'on ne peut dépasser.

2° Pour un électro-aimant donné, le moment magnétique dépend de l'arrangement des éléments de pile. J'ai indiqué un appareil très-simple, qui permet de disposer les éléments d'une façon quelconque.

3° Les actions mécaniques qui ne modifient pas l'état moléculaire des corps d'une façon permanente sont sans action sur le pouvoir rotatoire magnétique.

4° Le pouvoir rotatoire magnétique des corps amorphes se conserve intégralement dans le passage de l'état solide à l'état de simple dissolution.

5° Pour les corps très-dilatables, le rapport des densités aux différentes températures est le même que le rapport des rotations aux mêmes températures, sauf aux environs du point d'ébullition. Pour les corps moins dilatables, la diminution de densité n'est plus suffisante pour rendre compte de la diminution de la rotation. Il faut admettre que, dans ce cas, l'effet moléculaire est par lui-même moins énergique quand la température s'élève.

6° A deux températures quelconques, le rapport des rotations relatives aux différentes raies est un nombre constant.

7° Le pouvoir rotatoire ne se conserve pas intégralement dans le passage de l'état liquide à l'état de vapeur.

NOTICE

SUR LE

BASSIN MIOCÉNIQUE D'EAU DOUCE

DE KOUMI (EUBÉE),

PAR M. H. GORCEIX,

ANCIEN MEMBRE DE L'ÉCOLE FRANÇAISE D'ATHÈNES.

M. le comte de Saporta, avec une bienveillance dont je ne saurais trop le remercier, ayant bien voulu examiner une collection de plantes fossiles, recueillies pendant une de mes explorations géologiques en Eubée, en a fait le sujet d'une savante et intéressante Notice.

Le court aperçu sur la stratigraphie du bassin de Koumi dont je fais précéder cette étude a pour but de fixer l'horizon géologique de la couche d'où proviennent les échantillons étudiés.

Ce premier travail sera complété plus tard par la description des roches et des terrains de toute la partie nord de l'île d'Eubée.

La constitution géologique de l'île d'Eubée présente la plus grande analogie avec celle des provinces de l'Attique, de la Locride et de la Phthiotide, dont elle n'est séparée que par l'étroit canal de l'Euripe.

Les schistes et les calcaires cristallins de la région sud ne sont que la continuation des terrains du cap Sunium.

Les mêmes espèces minérales qui ont rendu célèbre cette partie de l'Attique forment des gisements importants autour de Karysto.

La région nord est occupée par une série de bassins d'eau douce de l'époque miocénique, séparés par des formations de calcaires et de

schistes métamorphiques dont le facies rappelle les roches de la chaine du Parnès.

Les terrains tertiaires correspondent, couche pour couche, à ceux que l'on trouve sur la côte de la terre ferme autour d'Oropos, et non loin d'Atalante.

Parmi ces bassins tertiaires de l'Eubée, un seul, celui de Koumi, a été jusqu'à présent l'objet d'études géologiques.

La puissance de la couche de lignite qu'il renferme, la grande quantité et la bonne conservation des empreintes de feuilles fossiles qu'on y rencontre l'avaient, dès les premières explorations scientifiques de la Grèce, signalé à l'attention des géologues. Unger a publié une première monographie des espèces végétales recueillies par lui; M. Sauvage une Notice sur le gisement de lignite; enfin M. Gaudry, dans son bel Ouvrage *Sur la Stratigraphie et la Paléontologie de l'Attique,* a donné une coupe de la partie nord de ces formations.

Des travaux considérables, entrepris depuis quelques années, pour l'exploitation du lignite et de quelques gisements de chromite de fer, placés au milieu des serpentines qui bordent le bassin, nous ont permis de recueillir quelques espèces nouvelles de plantes et de repérer plus complétement les couches qui le constituent.

Ce bassin, d'une étendue dépassant probablement 25000 hectares, occupe, à peu près au milieu de la côte est de l'Eubée, une échancrure déprimée ayant la forme d'un pentagone irrégulier.

A l'ouest et au nord, il est limité par les montagnes à pentes très-escarpées connues sous le nom de *Mavro-Vouni*.

Ces montagnes dépendent de la chaine du Delphi, la plus importante de l'Eubée.

Les schistes et les calcaires cristallins qui les composent ont la plus grande ressemblance d'aspect avec ceux du Parnès et des environs de Thèbes.

Mais la très-grande rareté de fossiles dans les unes, l'absence complète de corps organisés dans les autres, ne permettent pas, pour le moment, de fixer leur âge géologique.

Les mêmes dislocations les ont bouleversées; on y retrouve ces mêmes gouffres, ou katavothras, si nombreux autour du lac Copaïs, où les eaux de pluie et de la fonte des neiges se perdent et vont ali-

menter ces sources abondantes, jaillissant dans la plaine, et dont la plus célèbre est la fontaine Aréthuse, près de Chalcis.

Au sud, les mêmes roches forment une bordure analogue, mais beaucoup moins élevée.

Deux torrents, celui de Platanos et d'Oxylithos, le traversent de l'ouest à l'est.

Tout autour de l'embouchure du torrent d'Oxylithos existe une vaste plage formée par des atterrissements modernes.

Puis viennent, jusqu'à Koumi, des falaises coupées à pic, dont la hauteur atteint 150 à 200 mètres, et où l'on peut étudier une série considérable des terrains du bassin.

En allant du nord au sud, on y rencontre les couches suivantes (*Pl. I, fig.* 19) :

1° Calcaire marneux très-friable, avec quelques empreintes de feuilles,

180 mètres.

2° Argile brune,

100 mètres.

3° Grès friable avec bancs de marne et couches peu épaisses de calcaire tabulaire compacte,

250 mètres.

Ces calcaires, dans le redressement des couches, ont subi des flexions très-importantes, fournissant un exemple curieux de l'élasticité de certaines roches; ils sont recourbés, tantôt en voûte, tantôt en forme de crosse.

4° Marnes argileuses passant à l'argile avec bancs de grès,

30 mètres.

5° Petits lits de marnes de 1 mètre de puissance, avec calcaires durs plissés,

30 mètres.

6° Argile avec calcaire marneux,

90 mètres.

7° Marnes alternant avec des grès grisâtres et des sables grossiers, ces derniers ayant peu d'importance,

350 mètres.

Toutes ces couches sont relevées de 15 à 20 degrés vers l'est.

La ville de Koumi est bâtie, partie sur les marnes, partie sur les

schistes secondaires. On peut suivre les points de contact des deux formations en contournant la région des villages de Mackalas, où des couches puissantes de serpentine, intercalées dans les schistes, forment une presqu'île s'avançant dans le bassin tertiaire.

Un ravin au nord de cette presqu'île conduit de Koumi au vallon de Rockio, où se trouvent les plus anciennes galeries de l'exploitation du lignite.

En suivant ce ravin on traverse les couches suivantes :

1° Calcaire cristallin passant au macigno, quelquefois au marbre.
2° Schistes compactes où sont intercalés des bancs de calcaire dur, noirâtre.
3° Schistes terreux feuilletés.
4° Serpentine peu compacte, conservant un caractère prononcé de fissilite.
5° Schistes terreux.
Ces roches sont fortement relevées vers le nord-ouest.
6° Marnes et calcaires miocéniques relevés vers l'est.

Le vallon de Rockio, sur les parois duquel on voit des affleurements de lignite est creusé dans ces dernières formations.

Dans la coupe suivante de ce vallon on a indiqué les principales assises miocéniques riches en fossiles, et où ont été recueillies les plantes déterminées par M. de Saporta :

1° A la base (*Pl. I, fig.* 2), schistes et serpentines.
2° Argile verte avec petits lits de cailloux et de graviers empruntés aux roches sous-jacentes.
3° Couche de lignite d'épaisseur variable, atteignant parfois 4 mètres. On peut facilement constater qu'elle est affectée de nombreux glissements ayant produit d'importantes failles, et que souvent elle est plissée.
4° Marnes grisâtres, blanchâtres, formant le toit du lignite et bourrées de fossiles d'eau douce fortement comprimés et en très-mauvais état (planorbes, lymnées, cyrènes, etc.).
5° Calcaire marneux, friable, et calcaire plus compacte, avec empreintes de feuilles.
6° Calcaire tabulaire très-dur, avec restes de poissons.

Cette dernière formation ne constitue pas un horizon bien défini. Souvent, comme à Oropos, les calcaires durs tabulaires à poissons sont intercalés au milieu de marnes et calcaires marneux de la formation précédente.

La ligne de plus grande pente de ces couches plonge vers l'ouest.

par M. H. Gorceix.

Fig. 1

Coupe de la Falaise près de Koumi

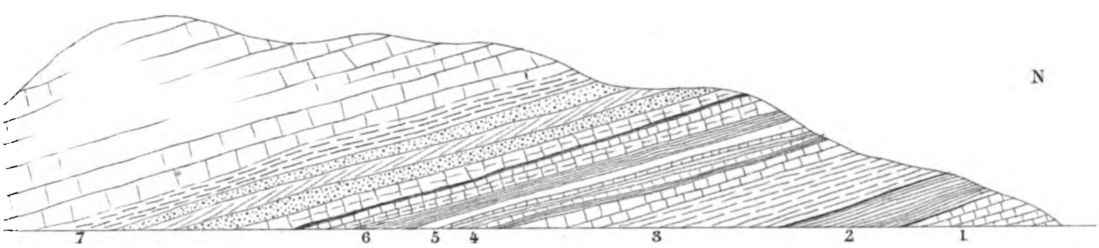
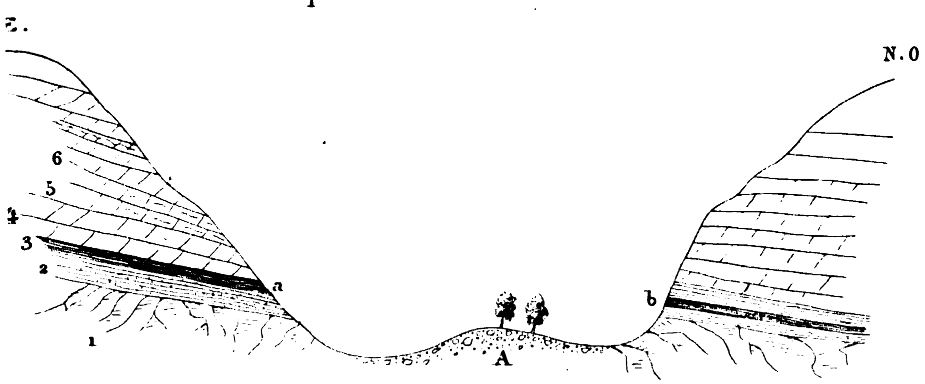


Fig. 2

Coupe du Vallon de Rockio



b *Ouverture de la galerie des Bavarois.*

a *Ouverture d'une nouvelle galerie.*

A *Conglomérats et alluvions modernes.*

En certains points, le lignite est compacte, de bonne qualité; en d'autres, il a conservé l'aspect de bois fossilisé, et l'on y trouve des troncs entiers de châtaigniers et de chênes.

De Kastrovala à Pyrgos, situé à l'extrémité nord du bassin, la dépression principale est bordée par une série de collines où l'on retrouve les marnes et les calcaires tabulaires.

Ces marnes deviennent plus argileuses dans le vallon, au pied de Pyrgos, où elles rencontrent les calcaires secondaires.

De Pyrgos à Gagia, la formation tertiaire conserve ces mêmes caractères sur le côté ouest du bassin.

Au-dessous du village de Gagia, assis sur les calcaires subcristallins, elle débute par des calcaires tabulaires avec empreintes mal conservées de plantes, auxquelles succèdent des marnes à planorbes se continuant jusqu'au delà du village d'Episcopi.

Non loin de ce village, près du moulin de Gamias, les marnes deviennent plus argileuses; au-dessous on aperçoit quelques traces de lignite.

Entre Episcopi et Dyrimala, dans les marnes, sont intercalés des bancs de graviers et de conglomérats.

Au sud, à Orio, la puissance des couches est moins considérable; les petites collines arrondies qu'elles forment sont constituées par des grès tendus avec bancs de conglomérats.

Leur importance augmente à mesure qu'on approche de Koumi, où la formation atteint son maximum de développement.

En résumé, le bassin miocénique d'eau douce de Koumi est formé, en allant de bas en haut, par :

1° Des argiles et conglomérats renfermant en certains points une couche de lignite;

2° Des marnes à fossiles d'eau douce;

3° Des marnes et calcaires marneux avec empreintes de plantes;

Au milieu de cette formation sont souvent intercalés des argiles, des sables passant aux grès et des conglomérats;

4° Des calcaires tabulaires caractérisés par la présence de restes de poissons.

Les sables et les grès dominent au sud; les marnes et les calcaires forment la plus grande partie des couches à l'est, à l'ouest et au nord.

C'est dans cette région, là où les lignites ont une certaine importance, que les échantillons de plantes sont le plus fréquents et le mieux conservés.

L'apparition des serpentines de ce bassin, si on les considère comme roches éruptives, les phénomènes de métamorphisme auxquels elles doivent leur composition actuelle, si on les regarde comme provenant de roches sédimentaires ou volcaniques, ultérieurement modifiées, sont antérieurs à l'époque miocénique.

Ce ne sont donc pas les phénomènes qui ont accompagné leur formation qu'on peut invoquer pour expliquer les soulèvements et les dislocations qui ont affecté toutes les couches tertiaires de Koumi.

J'inclinerai plutôt à considérer ces mouvements du sol comme contemporains de l'apparition des trachytes, que l'on rencontre dans cette région.

Ces trachytes forment deux amas importants, à une heure et demie au sud-est de Kastrovala, non loin du torrent de Platanos.

Ces deux pitons arrondis, de 100 à 150 mètres de hauteur, renferment deux variétés de roches : l'une terreuse, mais tenace, rappelle la domite; l'autre à pâte rouge, avec gros cristaux de feldspath, ressemble aux trachytes de Poros et de Méthana.

Ce gisement trachytique doit être rapproché de celui de l'île de Skyros, située à 20 milles au nord-est de Koumi.

On y retrouve les deux mêmes espèces de trachytes intercalés dans les schistes et en rapport avec des serpentines contenant du fer chromé; en outre, il y a un petit bassin tertiaire avec traces de lignite.

En terminant, j'ajouterai que la composition géologique du bassin de Koumi a, comme je l'ai déjà fait remarquer, une grande similitude avec celle des terrains aux environs d'Oropos.

La couche de lignite, dans cette région, repose sur des argiles vertes, le toit est formé de marnes et de calcaires avec empreintes de feuilles et débris de coquilles d'eau douce; au-dessus viennent des calcaires compactes, fossiles, avec restes de poissons, et exploités comme pierres à bâtir; ces couches sont, comme à Koumi, relevées vers l'est et affectées de nombreuses failles et de plissements analogues.

EXAMEN CRITIQUE

D'UNE

COLLECTION DE PLANTES FOSSILES

DE KOUMI (EUBÉE),

PAR M. LE COMTE DE SAPORTA.

J'ai reçu en communication de l'École Normale, en août 1872, par l'intermédiaire de M. le professeur Delesse, une collection de plantes fossiles recueillies, à Koumi, par M. Gorceix, ancien élève de l'École, attaché pour les sciences à l'École française d'Athènes. Cette collection, remarquablement choisie, comprenait un nombre d'espèces considérable, eu égard à celui des échantillons, dont l'état de conservation ne laissait rien à désirer. Il y avait, il est vrai, assez peu de nouveautés, et la plupart des spécimens, à l'exception de deux, ont pu recevoir des noms tirés, soit de l'Ouvrage de M. Unger (1), soit des deux Notices que j'ai moi-même publiées sur la flore fossile de Koumi (2); mais, après avoir achevé ce premier travail de détermination, il m'a paru nécessaire de le faire suivre d'une série d'explications et de rectifications,

(1) *Die foss. Flora von Kumi in der Insel Euboea,* von Prof. Dr. F. Unger, wirkl. Mitgl. d. Kaiserl. Akad. d. Wissensch.; mit 17 Taf. Wien, 1867.

(2) *Notice sur les plantes foss. de Koumi et d'Oropo,* insérée dans l'Ouvrage intitulé : *Animaux fossiles et Géologie de l'Attique,* par A. Gaudry, et *Note sur la flore fossile de Koumi (Eubée),* extr. du *Bull. de la Soc. géol. de France,* 2e série, t. XXV, p. 315, séance du 20 janv. 1868.

ayant pour but, non-seulement de décrire le peu d'objets entièrement nouveaux, mais surtout de fixer le caractère de plusieurs des espèces signalées par M. Unger ou par moi, de les délimiter autrement, et enfin de retirer de l'étude de ces spécimens tous les enseignements qu'ils comportent dans l'état actuel des connaissances. En effet, il suffit bien souvent d'une empreinte plus parfaite, tout à fait intacte ou laissant mieux voir les linéaments de la nervation, pour ouvrir la voie à des observations plus justes, quelquefois destinées à devenir définitives et à corriger des erreurs antérieures, fort excusables chez celui qui le premier a tenté de déchiffrer l'inscription à l'aide de documents défectueux.

Tel est le but de cette Notice, bien que je reconnaisse par avance que mon travail sera lui-même repris par d'autres; mais c'est la condition inévitable de la Botanique fossile de n'atteindre que péniblement et par degrés à la connaissance de la vérité.

Je vais d'abord donner la liste exacte et complète des espèces comprises dans l'envoi de M. Gorceix.

1. Widdringtonia kumensis Sap., *Bull. de la Soc. géol.*, 2e série, t. XXV, p. 317.
2. Glyptostrobus europæus Heer (*vide infra*).
3. Pinus holotana Ung., *Foss. Fl. v. Kumi*, p. 19, tab. 2, fig. 1-11. — Pinus hellenica Sap., *Not. extr. des Anim. foss. et Géol. de l'Attique, Pl. LXIV*, fig. 1.
4. Sequoia Tournalii Sap. (*vide infra*).
5. Myrica Ungeri Heer (*vide infra*).
6. Myrica vindobonensis Ung. (*vide infra*).
7. Myrica hakeæfolia Sap. — Dryandroides hakeæfolia Ung., *loc. cit.*, p. 36, tab. 9, fig. 1-15.
8. Alnus Sporadum Ung. (*vide infra*).
9. Betula ægæa Sap. (*vide infra*).
10. Carpinus betuloides Ung. (*vide infra*).
11. Quercus lonchitis Ung.
12. Quercus Zoroastri Ung.
13. Quercus mediterranea Ung.
14. Ficus Aglajæ Ung. (*vide infra*).
15. Cinnamomum lanceolatum Ung.
16. Cinnamomum Scheuchzeri Heer.
17. Laurus lalages Ung. (*vide infra*).
18. Laurus primigenia Ung.
19. Laurinastrum dubium Ung.
20. Grevillea kymæna Ung. — Lomatites aquensis Sap., *Bull. Soc. géol.*, *loc. cit.*, p. 319.
21. Myrsine grandis Ung.
22. Sideroxylon Putterliki Ung.
23. Chrysophyllum olympicum Ung.

24. Royena græca Ung. (*vide infra*).
25. Aralia detecta Sap. (*vide infra*).
26. Sapindus græcus Ung.
27. Rhamnus brevifolius Ung.
28. Celastrus Gorceixi Sap. (*vide infra*).
29. Celastrus Persei Ung.

Quelques-unes de ces espèces, en dehors même de celles que je soumets plus loin à un examen particulier, pourraient donner lieu à des remarques intéressantes. Rien de plus incertain, comme attribution générique, que le *Sideroxylon Putterliki* et le *Chrysophyllum olympicum*. Le *Laurus primigenia*, de la collection Gorceix, m'a paru identique avec les figures données par Unger dans la Flore de Koumi; mais l'assimilation de cette espèce avec les spécimens de l'Europe occidentale signalés sous le même nom est bien plus entachée de doute.—Les *Quercus lonchitis* et *Zoroastri* sont bien réellement des chênes, d'autant plus intéressants à mes yeux qu'ils n'ont pas encore été observés dans le midi de la France; il m'a semblé que le premier, au moins, présentait la physionomie de certains Chênes indiens, plutôt que de tout autre. Mais il est vrai de dire que l'interprétation véritable des Chênes européens miocènes constitue une des plus grandes difficultés de la Botanique descriptive de cet âge. Il vaut mieux attendre du temps des lumières plus décisives, que de se prononcer trop vite et sans raison péremptoire. — Il n'existait dans la collection Gorceix que des lambeaux imparfaits de deux espèces dont j'aurais bien voulu entreprendre l'étude comparative; je veux parler du *Widdringtonia kumensis* Sap. (*Callitris Brongniartii* Ung. (1) (non Endl.), *Fl. v. Kumi*, tab. 1, *fig*. 1-2) et du *Grevillea* (*Lomatites* Sap.), *Kymæna* Ung., *loc. cit.*, p. 33, tab. 8, *fig*. 15-31, et tab. 6, *fig*. 31. Ces deux espèces, si l'on s'en rapporte aux figures d'Unger, ne seraient que des répétitions fort peu modifiées du *Widdringtonia brachyphylla* Sap. et du *Lomatites aquensis* espèces caractéristiques de la flore des gypses d'Aix, mais dont la seconde se montre en Provence jusque dans l'aquitanien de Manosque, par conséquent sur un horizon équivalent à celui de Koumi. Le *Widdringtonia*

---

(1) C'est par une erreur matérielle, dont l'auteur lui-même (*in litteris*) ne se rendait pas compte, que cette belle espèce a été figurée par lui sous le nom de *Callitris Brongniartii*. Le *C. Brongniartii* existe lui-même à Koumi à côté du *Widdringtonia*.

brachyphylla (¹) est, au contraire, remplacé dans le tongrien par un *Widdringtonia* un peu différent, le *W. antiqua* (²) Sap. C'est entre ces deux espèces que le *W. kumensis* semble devoir venir se placer, et peut-être leur sert-il de lien commun.

Je vais maintenant examiner les espèces de la collection Gorceix qui m'ont paru, à divers points de vue, mériter une mention particulière et donner lieu à des remarques, appuyées chaque fois de la figure des spécimens sur lesquels j'ai voulu attirer l'attention des amis de la Paléontologie végétale.

I. — GLYPTOSTROBUS EUROPÆUS Heer, *Fl. tert. Helv.*, I, p. 51, tab. 19-20, fig. 1. — *Fl. foss. arct.*, p. 90, tab. 3, fig. 2-5 et tab. 45, fig. 20-22. — *Fl. Alask.*, p. 2, tab. 1, fig. 76, c. et tab. 3, fig. 10-11. — *Mioc. balt. Fl.*, p. 20, tab. 3, fig. 8-9. — Ung., *Fl. v. Kumi*, p. 18, tab. 1, fig. 3-11. — Ch. Gaud., *Mém. sur quelques gisem. de feuilles foss. de Toscane*, p. 26, tab. 1, fig. 5-10. — Sap., *Étude sur la vég. tert.*, III, p. 49. — Ettingsh., *Fl. v. Bilin*, p. 37, tab. 11, fig. 3-7 et 11-12.

(*Pl. II, fig.* 1-4).

TAXODITES EUROPÆUS Brongt., *Ann. Sc. natur.*, 1^re^ série, t. XXX, p. 168. — *Expédit. de Morée*, 2^e^ série (*Géologie*), p. 235. — 2^e^ partie, p. 364, *Pl. XII*.
— Endl., *Syn. Conif.*, p. 278.
— Ung., *Gen. et sp. foss.*, p. 350.
— Gœpp., *Monogr. Conif. foss.*, p. 192, tab. 22, fig. 1.

TAXODITES ŒNINGENSIS Endl., *Syn. Conif.*, p. 279.
— Ung., *Gen. et sp. pl. foss.*, p. 351.
— Ettingsh., *Fl. v. Wildshut*, p. 5, tab. 1, fig. 2.

TAXODIUM ŒNINGENSE Ung., *Chl. protog.*, p. 82.

GLYPTOSTROBITES ŒNINGENSIS Al. Br., in *Stiz. verz.*, p. 73.

GLYPTOSTROBUS ŒNINGENSIS Ung., *Iconogr. pl. foss.*, p. 21, tab. 11, fig. 1-3.

GLYPTOSTROBUS UNGERI Heer, *Fl. tert. Helv.*, I, p. 52, tab. 18.

GLYPTOSTROBUS BILINICUS Ett., *Fl. v. Bilin*, p. 39, tab. 11, fig. 1-2-10.

CUPRESSITES RAMOSUS ET FASTIGIATUS Gœpp., *Monogr. Conif. foss.*, p. 184 et 185, *Pl. XIX*.

THUITES GRAMINEUS Sternb., *Vers.*, I, p. 38, tab. 35, fig. 4.

L'unique représentant actuel du genre *Glyptostrobus* est le *G. heterophyllus* Endl., qui vit dans les parties humides de la Chine (prov. Shan-

---

(¹) *Étude sur la vég. tert.*, I, p. 58. — *Ann. Sc. natur.*, 4^e^ série, t. XVII, p. 2, *fig.* 7.
(²) *Étude sur la vég. tert.*, I, p. 187, et II, p. 69. — *Ann. Sc. nat.*, 4^e^ série, t. XIX, p. 33, *Pl.* III, *fig.* 3, et 5^e^ série, t. III, p. 73.

Tung et Kiang-Nan), du 24^e au 36^e degré latitude nord, notamment le long des rizières, auprès de Canton. Il constitue un petit arbre, ou plus ordinairement un arbuste de 8 à 10 pieds de haut. Le *Glyptostrobus pendulus* Endl. (*Taxodium sinense* Nois.), du nord de la Chine, est au contraire un véritable *Taxodium*, ainsi que j'ai pu m'en assurer dernièrement, cette espèce rare ayant fructifié au Roucas-Blanc, près de Marseille, chez M. Paulin Talabot.

L'espèce tertiaire paraît également avoir été unique, et comme il est naturel d'admettre, à cause de leur étroite liaison, que le *Gl. heterophyllus* est un descendant peu modifié du *Gl. europæus*, l'étude des caractères de la distribution géographique et des variations que présente celui-ci doit être pour nous d'un sérieux intérêt. — Le *Gl. europæus* a possédé, à un moment donné de l'époque tertiaire, vers son milieu, une immense extension, puisqu'il a été signalé à la fois dans les régions polaires (Alaska, Groënland), dans l'Europe septentrionale (région Baltique) et dans le sud de notre continent (Grèce, Koumi, Hiliodroma). Il abonde en Suisse, en Allemagne, en Italie, et son existence s'est longtemps prolongée, puisqu'on en observe des traces dans le pliocène du val d'Arno supérieur, ainsi que dans les tufs de Meximieux. M. Heer avait distingué d'abord, sous le nom de *Glyptostrobus Ungeri*, une seconde espèce basée sur des ramules et des fruits provenant d'Hohe-Rhonen; mais, dans le *Supplément* à sa grande *Flore fossile de Suisse,* il a abandonné cette opinion et n'a plus considéré le *Gl. Ungeri* que comme une simple variété de l'espèce ordinaire, dont il diffère à peine par ses feuilles ramulaires plus développées que les caulinaires. Cependant, d'après des échantillons, que je tiens de M. Heer lui-même, les ramules à feuilles étalées, distiques linéaires, attribuées par ce savant à son *Gl. Ungeri*, appartiendraient en réalité au *Taxodium dubium*, dont les dépouilles se trouvent effectivement mêlées à celles du *Gl. europæus*, en sorte que, si cette explication est vraie, le *Gl. Ungeri* ne subsisterait pas même à titre de variété *bien distincte*. Il en est de même du *Gl. bilinicus* d'Ettingshausen, qui ne diffère du type fossile ordinaire, auquel il se trouve associé à Bilin, que par un développement éventuel des feuilles de certains ramules. Cette disposition dénote tout au plus une tendance de l'espèce tertiaire à se rapprocher du *Glyptostrobus heterophyllus*, qui ne s'écarte de son devancier tertiaire que par

deux points seulement, l'allongement des feuilles des ramules annuels par rapport à celles des parties persistantes et des fruits plus petits, moins ovales, plus élargis en coin obtus au sommet. Or, parmi les formes fossiles, il en existe justement quelques-unes qui tendent à amoindrir la distance et à établir un passage visible du type ancien vers le type actuel survivant.

Les fruits les plus gros sont ceux du *Gl. europæus* de Manosque; ils mesurent en moyenne 2 centimètres de longueur, quelquefois davantage, sur une largeur maximum de 15 millimètres. Les spécimens d'Œningen ont exactement les mêmes proportions et des deux parts les ramules affectent la même apparence, c'est-à-dire que les feuilles des dernières ramifications ne diffèrent pas, ou diffèrent à peine, de celles des rameaux permanents. Cette même disposition existe dans les spécimens de Koumi, ainsi que l'on peut s'en assurer par notre *fig.* 1, *Pl. II*, et celles de M. Unger, parfaitement concordantes. Seulement ici les strobiles (*fig.* 2, 3 et 4) sont notablement plus petits que ceux de Manosque et d'Œningen. Leur longueur moyenne est seulement de 15 millimètres, leur longueur maximum de 18 millimètres, sur une largeur de 12 à 14 millimètres. La forme de ces strobiles est un peu différente; ils paraissent moins régulièrement arrondis, un peu plus oblongs et plus élargis vers le haut, par conséquent plus voisins de ceux du *Gl. heterophyllus* actuel. Chaque écaille, arrondie et élargie au sommet, se trouve marquée sur le pourtour de sept à neuf crénelures et distinctement appendiculée vers son milieu; en dessous de l'appendice, qui donne souvent lieu à un mucron légèrement saillant et un peu recourbé, la partie inférieure de l'écaille s'amincit et se prolonge plus où moins. On peut dire que ces cônes sont construits exactement comme ceux de l'espèce moderne, sauf que chez celle-ci ces organes sont plus allongés; mais le cône de Koumi, reproduit *fig.* 3, se rapproche sensiblement de ceux du *Gl. heterophyllus*, sauf qu'il est un peu plus épais. Les fruits de Salzausen figurés par Unger (*Iconogr.*, tab. 11, *fig.* 2), ceux de Bilin, reproduits par M. d'Ettingshausen (*Fl. v. Bilin*, tab. 11, *fig.* 1-4 et 10) sont exactement pareils à ceux de Koumi, et de plus ils se confondent presque avec ceux de l'espèce actuelle. Ils s'éloignent donc à ce point de vue de ceux de Manosque et d'Œningen, et de plus les ramules qui leur sont associés montrent parfois des feuilles plus ou moins allongées

aciculaires; mais, de tous les spécimens de ramules de *Glyptostrobus* tertiaires, ce sont ceux de l'Alaska (ancienne Amérique russe) qui offrent le plus d'analogie avec ceux du *Gl. heterophyllus*, ainsi que le fait très-bien remarquer M. Heer; cependant ces derniers débris sont trop rares et trop incomplets pour permettre de retirer de leur examen aucune conclusion générale.

En se renfermant en Europe et s'aidant de l'étude d'échantillons très-nombreux, sans sortir des limites d'une seule espèce, qui, du reste, jusqu'à sa disparition de notre continent, a conservé des caractères généralement fixes, on est amené à reconnaître que le *Glyptostrobus europœus*, lors de sa plus grande extension, comprenait plusieurs formes locales ou races, dont l'une à fruits plus gros et plus arrondis, particulière à la Provence et à la Suisse, l'autre se distinguant par des fruits plus menus et plus courts, observée à Koumi, et enfin une troisième présentant à la fois des fruits plus petits et des feuilles accidentellement plus développées sur les ramules annuels. Cette dernière variété, plus rare ou plus difficile à observer, peut-être moins constante, serait de toutes la plus voisine du *Glyptostrobus heterophyllus*, dont la forme de Koumi, déjà moins rapprochée, ne s'écarterait pourtant pas autant que le *Glyptostrobus europœus* normal de Manosque et d'Œningen.

II. — SEQUOIA TOURNALII Sap., *Ann. Sc. natur.*, 5ᵉ série, t. IV, *Pl. II*, fig. 1, et t. V, p. 50. — Schimp., *Traité de Pal. vég.*, t. II, p. 320.

(*Pl. II, fig.* 5-6.)

TAXITES TOURNALII Brngt., *Prodr.*, p. 188 et 212. — *Ann. Sc. natur.*, t. XV, p. 47, *Pl. III*, fig. 4.
— Endlich., *Syn. Conif.*, p. 307.
— Gœpp., *Monogr. Conif. foss.*, p. 245.

SEQUOIA LANGSDORFII Ung., *Foss. Fl. v. Kumi auf Ins. Eubœa*, p. 21, tab. 2, fig. 17-23.
— Sap., *Pl. foss. de Koumi et d'Oropo*, p. 2.

Je figure deux fragments ayant appartenu à cette espèce, l'un se rapportant au sommet, l'autre à la base d'un ramule; ils sont destinés à faire voir comment, à l'aide de faibles débris, on peut quelquefois s'assurer de l'identité d'une espèce sur un point donné du sol tertiaire. Il n'est pas douteux, en effet, qu'il ne s'agisse ici, non pas précisément

du *Sequoia Langsdorfii*, si répandu en Suisse et en Allemagne et jusque dans les régions polaires, à l'époque miocène, ainsi que l'a avancé M. Unger, mais plutôt du *Sequoia Tournalii*, proche parent du précédent, il est vrai, mais qui en diffère pourtant quelque peu par des feuilles plus courtes, moins grêles et moins étalées-flexueuses, ainsi que par des cônes plus gros, quelquefois solitaires, d'autres fois agrégés au nombre de trois à cinq à l'extrémité d'un long rameau dénudé. Par ses divers caractères, par la dimension même et le mode d'insertion de ses fruits, le *Sequoia Tournalii* se rapproche tellement du *Sequoia sempervirens* de Californie, que l'on ne saurait marquer aucune divergence sensible entre les deux espèces. Les fruits de Koumi, figurés par M. Unger, mesurent une longueur de 22 à 23 millimètres; ceux d'Armissan en ont 16, 18, 20 au plus; ceux de l'espèce actuelle, recueillis en Europe, il est vrai, ne dépassent guère une longueur de 18 millimètres. Ce sont là de bien faibles différences, en présence de la conformité parfaite de tous les autres détails de structure, et l'on est amené à croire que l'essence qui se montre maintenant dans une région peu étendue, voisine des plages occidentales de l'Amérique, n'est qu'un prolongement de celle qui habitait l'Europe vers le milieu des temps tertiaires.

A cette époque, le type du *Sequoia sempervirens* était loin de se trouver isolé comme de nos jours. Répandu dans tout l'hémisphère boréal, il comprenait une série de formes très-voisines les unes des autres; nous en connaissons au moins trois, qui sont les *Sequoia Tournalii, Langsdorfii* et *Hardtii*. M. Heer a signalé encore dernièrement deux autres variétés ou races, qui faisaient évidemment partie du même groupe et habitaient le nord de notre hémisphère : c'étaient les *Sequoia brevifolia* et *Nordenskioldi*. Le premier, observé sur les bords de la Baltique, au Groënland et au Spitzberg, ressemblait au *S. Tournalii* sous de plus petites dimensions; l'autre était particulier au Spitzberg. Les ramules de celui-ci étaient allongés, étroits, linéaires; ses feuilles étaient courtes, à peine rétrécies à la base et généralement obliques; ses fruits étaient petits et attachés au sommet d'un rameau relativement épais. — Dans la flore de l'Alaska, si voisine géographiquement de la région où vit aujourd'hui le *Sequoia sempervirens*, M. Heer signale, à côté du type le plus ordinaire, sous le nom de *Sequoia Langsdorfii*,

var. *foliis planioribus apice obtusis* ([1]), une forme curieuse, susceptible peut-être, si elle était mieux connue, de constituer une espèce à part. Quant au *Sequoia* du Groënland, *S. Langsdorfii* Heer ([2]), ses feuilles plus courtes, moins atténuées au sommet, plus roides et plus serrées, le distinguent, selon moi, des exemplaires du Monod, que j'ai sous les yeux, et le rapprochent par cela même du *Sequoia Tournalii* et plus encore du *Sequoia sempervirens*. M. Heer, qui a pu faire la comparaison minutieuse des divers organes de cette espèce avec ceux de l'arbre actuel de la Californie, n'a constaté entre eux d'autre différence que la dimension un peu plus forte du cône, dans l'espèce fossile. — Il paraît donc probable que le *Sequoia sempervirens* doit être considéré comme une descendance directe de la forme tertiaire du Groënland, tandis que les *Sequoia Langsdorfii* et *Tournalii* représenteraient les races européennes de ce même type, dont les *Sequoia brevifolia* et *Nordenskioldi* dénoteraient les races polaires. Le *Sequoia Hardtii* (*Chamæcyparites Hardtii* Ett.) s'écarterait davantage des précédents, et fournirait un passage vers les *Sequoia Sternbergii* et *Couttsiæ;* celui-ci, de son côté, toucherait au *Sequoia gigantea*, qui n'aurait cependant aucun représentant tout à fait direct, à l'état fossile, du moins dans l'état actuel des connaissances.

III. — MYRICA UNGERI Heer, *Fl. tert. Helv.*, II, p. 35, tab. 70, fig. 7-8. — Sap., *Pl. foss. de Koumi et d'Oropo*, p. 3, *Pl. LXIV*, fig. 2. — *Bull. Soc. géol.*, 2ᵉ série, t. XXV, p. 319.

(*Pl. II, fig.* 14.)

COMPTONIA LACINIATA Ung., *Fl. v. Sotzka, Pl. XXXI*, tab. 8, fig. 2.

DRYANDROIDES LACINIATA Ett., *Proteac. d. Vorw.*, p. 33.

Voici une seconde empreinte qui vient s'ajouter à celle que j'ai figurée précédemment, et qui me semble confirmer la présence à Koumi d'une race tertiaire, signalée d'abord à Radobiz et à Parschlug et depuis en Suisse par M. Heer, mais qui se montre rare partout. Elle se distingue de l'espèce décrite ci-après, à laquelle elle ressemble beaucoup, par une

---

([1]) *Voir* Heer, *Fl. Alask.*, p. 23, tab. 1, fig. 106.
([2]) *Fl. foss. arct.*, p. 91, tab. 2, fig. 2-22; 45, fig. 13 *a-c*, 14-18 et 47, fig. 36.

consistance plus coriace, des bords irrégulièrement incisés et des lobes munis de dents espacées, peu saillantes et obtuses.

C'est là une forme évidemment alliée de plus ou moins près au *Myrica matheroniana* Sap. ([1]), d'Armissan, et dénotant un type aujourd'hui disparu, ou imparfaitement représenté par le *Myrica esculenta* Don., du Népaul, dont les lobes, doublement incisés et obtus, ressemblent un peu à ceux des empreintes fossiles; mais celles-ci se rapportent à des feuilles persistantes, plus ou moins coriaces, et cette particularité établit entre elles et la forme mentionnée plus haut une distance considérable.

IV. — MYRICA OXYDONTA.

(*Pl. II, fig.* 15.)

MYRICA VINDOBONENSIS Ung., *Foss. Fl. v. Kumi*, p. 22, tab. 4, fig. 20-30.

Il me paraît impossible de réunir cette remarquable espèce au *Myrica vindobonensis* Heer (*Dryandra vindobonensis* Ett.), à l'exemple de M. Unger. Le savant autrichien, dans sa *Flore fossile de Koumi*, a figuré toute une série de feuilles, les unes incisées, à lobes simples, les autres à lobes denticulés; les premières seulement (*fig.* 25 à 29) reproduisent l'aspect du *Myrica vindobonensis;* mais il est plus naturel de ne pas les séparer les unes des autres et de les considérer toutes également comme ayant fait partie d'une seule et même espèce. Il n'est pas douteux non plus que le bel exemplaire de la collection Gorceix, fidèlement reproduit *Pl. II, fig.* 15, ne doive aussi en être rapproché : il en présente tous les caractères de forme, de dimension relative du pétiole et de physionomie générale; il est seulement plus développé dans ses diverses parties, et pourvu de lobes distincts, quoique peu saillants, régulièrement incisés et denticulés à dents aiguës vers le sommet; la base de la feuille est entière et atténuée en coin sur un court pétiole.

La consistance, bien appréciable à cause de la netteté de l'empreinte, était membraneuse et souple, peut-être ferme, mais nullement coriace. Le réseau veineux se trouve perceptible jusque dans les moindres détails, tandis que M. d'Ettingshausen, lorsqu'il a appliqué à la feuille du bassin de Vienne le terme générique de *Dryandra*, a eu soin d'en

([1]) *Étude sur la vég. tert.*, II, p. 237; *Ann. Sc. natur.*, 5e série, t. IV, *Pl. V*, fig. 7.

signaler la texture coriace et de remarquer que les nervures n'étaient pas visibles, sauf les principales.

L'empreinte si bien caractérisée que je figure ici devient ainsi le type d'une espèce que je crois nouvelle, dont le degré d'affinité avec le *Myrica vindobonensis* demeure incertain, mais qui, en tous cas, présente les traits distinctifs les plus curieux et les mieux définis. Elle se rapproche certainement, mais sans se confondre avec lui, du *Myrica serrata* Lam. (*M. æthiopica* Cas. D. C., *Prodr.*, t. XVI, Partie II, p. 153, *sed non* Linné), espèce du Cap dont les feuilles, construites exactement sur le modèle de celles de Koumi, s'en écartent pourtant par des lobes plus étroits et plus irrégulièrement denticulés, généralement plus prolongés en pointe. La ressemblance est cependant fort étroite des deux parts et doit être d'autant plus remarquée que la physionomie africaine de la végétation de Koumi a été déjà mise en lumière par M. Unger, ainsi que par moi, et se trouve d'ailleurs en parfait accord avec ce que montrent d'autres localités contemporaines ou plus anciennes de l'Europe tertiaire, entre autres celle des gypses d'Aix, et avec les affinités mêmes de la faune, déjà plus moderne, de Pikermi. Pour ce qui est du *Myrica oxydonta*, sa parenté avec le *M. serrata* est si étroite, qu'elle doit correspondre à un lien quelconque de filiation de l'un par l'autre, et, en considérant les formes fossiles, je citerai, comme confinant à l'espèce de Koumi, le *Myrica Graeffii* (¹) Heer de l'aquitanien suisse (Hohe-Rhonen). L'analogie est même tellement complète, qu'il n'y aurait rien de surprenant à ce que l'on proposât plus tard la réunion des deux espèces.

V. — ALNUS SPORADUM Ung., *Foss. Fl. v. Kumi,* p. 23, tab. 3, fig. 1-7 (*excl. prob. folio*). — *Excluso etiam Alno Sporadum* Sap., in *Étude sur la vég. tert.*, III, p. 6; *Ann. Sc. natur.*, 5ᵉ série, t. VIII, *Pl. IV*, fig. 2-6, *qui visibiliter ad aliam stirpem, si folia hic et nunc descripta legitima sunt, pertinet.*

(*Pl. II, fig.* 8-9.)

ALNUS CYCLADUM Ung. (*ex parte*), *Foss. Fl. v. Kumi, Pl. III,* fig. 16 et 22.

La présence de deux espèces d'*Alnus* dans la flore de Koumi semble attestée par les strobiles de deux sortes que M. Unger a figurés (*fig.* 1-5 et 9-10), mais l'attribution à chaque catégorie d'organes de leurs

(¹) *Fl. tert. Helv.*, III, p. 176, tab. 150, fig. 19-20.

feuilles respectives (si toutefois il faut réellement admettre deux espèces) a été jusqu'à présent obscure et difficile. Grâce aux échantillons recueillis par M. Gorceix, il m'a été possible d'éclaircir et de résoudre, partiellement au moins, cette question. Je m'attache seulement ici à l'espèce qui portait de gros fruits: ce sont des strobiles d'assez grande taille, approchant de ceux de l'espèce de Manosque (*Alnus Sporadum* Sap. *non* Unger; *A. massiliensis* Sap.), mais plus ovoïdes et ressemblant évidemment à ceux des *Alnus cordifolia* Ten., *subcordata* C.-A. Mey., *orientalis* Dne et *maritima* Nutt, qui composent ensemble un groupe fort naturel d'espèces reliées entre elles par des formes intermédiaires. M. Unger avait signalé en premier lieu (¹) un fragment de feuille, à bords entiers, assez analogue à celles de l'*Alnus* (*Clethropsis*) *nepalensis*, comme pouvant se rapporter à la même espèce que les strobiles de grande taille; j'avais également figuré une empreinte de feuille, largement ovale et mutilée sur les côtés, rapportée de Grèce par M. Gaudry, comme présentant le même aspect; mais ces attributions étaient toutes deux plus ou moins entachées de doute. La feuille dont je reproduis ici un dessin des plus exacts (*Pl. II, fig.* 8) ne saurait en faire naître aucun: c'est bien celle d'un *Alnus*, dont il est même possible de constater la consistance membraneuse et délicate. Elle affecte un contour presque orbiculaire, sauf le sommet, qui se trouve rongé naturellement, mais qui sans doute, à l'état normal, n'était que peu ou pas atténué en pointe. La disposition des nervures principales, celle du réseau veineux et de la dentelure, qui est simple et peu prononcée, dénotent une forme très-voisine de l'*Alnus orientalis* Dne et plus particulièrement des variétés larges et arrondies de l'*Alnus subcordata* C.-A. Mey. qui habite de nos jours l'Asie Mineure, principalement aux abords du Caucase, et ne constitue peut-être qu'une race alliée de près à l'*A. orientalis*. Les feuilles de ce dernier comptent depuis dix jusqu'à douze paires de nervures secondaires; elles sont plus oblongues que la feuille de Koumi et assez ordinairement doublement dentées, à dents principales très-obtuses. Il existe, il est vrai, dans l'ile de Chypre une variété de l'*A. orientalis* (*A. oblongata* Wild., *Herb. par.*, non *Reg. Monog.*) dont les feuilles sont ellipsoïdes et simplement

(¹) *Foss. Fl. v. Kumi,* tab. 3, fig. 8.

denticulées sur les bords. Cette variété se rapproche de la forme fossile, qui est cependant plus large et plus orbiculaire. L'*Alnus subcordata*, dont j'ai pu étudier de beaux spécimens, présente des feuilles largement ovalaires, denticulées à dents simples, obtusément anguleuses et peu prononcées, avec sept ou huit paires de nervures secondaires, dont la disposition rappelle tout à fait ce qui existe dans les empreintes de Koumi. Celles-ci affectent pourtant un contour encore plus arrondi, et la proportion des strobiles fossiles paraît aussi un peu plus forte que celle des parties correspondantes de l'*Alnus subcordata*. Ces différences sont les seules que l'on puisse signaler ; elles sont trop faibles pour séparer entièrement l'espèce fossile de celle de nos jours, et l'on peut dire que la première est à la seconde justement ce que celle-ci est à l'*A. orientalis* Dne : une race alliée de trop près pour constituer une espèce réellement distincte. — Je réunis à l'empreinte que je viens de décrire celle d'une feuille beaucoup plus petite (*Pl. II, fig.* 9), qui offre exactement les mêmes caractères de forme et un nombre égal de nervures secondaires, avec la même disposition du réseau veineux. Cette feuille est cependant très-analogue à celles que M. Unger a placées dans son *Alnus Cycladum* ou du moins à une partie d'entre elles. Je suis donc disposé à admettre qu'il y a eu confusion de la part de l'auteur autrichien, et que, parmi les feuilles auxquelles il a appliqué la dénomination d'*Alnus Cycladum*, il en est quelques-unes (notamment *fig.* 16 et 22) qui doivent être reportées, comme la nôtre, dans l'*Alnus Sporadum*, dont elles représentent les plus petites feuilles, celles qui, chez les Aunes, occupent la base ou le sommet des jets annuels, et diffèrent beaucoup en grandeur des feuilles dont le développement est normal. L'étude comparée des deux exemplaires recueillis à Koumi par M. Gorceix me permet de formuler cette opinion comme l'expression probable de la vérité.

VI. — BETULA ÆGÆA.

(*Pl. II, fig.* 10.)

ALNUS CYCLADUM Ung. (*ex parte, quoad folia parvula*), *Foss. Fl. v. Kumi,* tab. 3, fig. 12-13, 19-21.

A la suite de l'*Alnus Sporadum* et à côté de la plus petite des feuilles que j'attribue à cette espèce vient se placer une empreinte curieuse de

la collection de M. Gorceix, qui m'a paru dès l'abord devoir être identifiée avec les feuilles de l'*A. Cycladum* d'Unger. Les figures données par ce savant ne suffisent pas pour me permettre de trancher la question dans l'un ou l'autre sens, et, les échantillons originaux n'étant pas à ma disposition, je m'abstiens de décider si les feuilles recueillies par Unger sont réellement celles d'un *Alnus* voisin de l'*A. viridis*, ou bien si elles sont pareilles à celle que je reproduis ici. Celle-ci consiste en une petite feuille ovale ou, mieux encore, subdeltoïde, arrondie inférieurement, obtusément atténuée au sommet, pourvue sur les bords de crénelures obtuses, mais bien prononcées, et supportée par un court pétiole. Tandis que les feuilles de l'*A. Sporadum* paraissent avoir été unies à la surface, celle que je décris présente un réseau veineux fortement prononcé et des nervures saillantes et fortes. Les secondaires sont au nombre de cinq paires seulement, assez obliques et subopposées. Les deux inférieures, plus développées que les suivantes et partant presque de la base, émettent le long de leur côté extérieur des ramifications qui se subdivisent pour se rendre dans les dentelures. Il en est de même des nervures suivantes, dont les rameaux simples ou bifurqués vont aboutir aux dents du bord et sont de plus reliés entre eux par des anastomoses. Dans l'intervalle qui sépare les nervures principales, courent des veines transverses, simples ou bifurquées, droites ou coudées, flexueuses et réunies par des veinules, dont l'ensemble donne lieu à un réseau plus irrégulier, moins serré et moins fin que celui des feuilles de l'*A. Sporadum*.

Tous les détails sur lesquels je viens d'insister révèlent dans cette feuille un *Betula* extrêmement analogue au *B. dahurica* Pall. ([1]), originaire de la région du fleuve Amour, et au *B. pumila* L., de l'Amérique du Nord. — Parmi les espèces fossiles signalées jusqu'à présent et comparables au *B. ægæa*, il faut citer d'abord le *Betula pulchella* Sap. ([2]), dont les crénelures sont plus fines, le contour plus ellipsoïde, les nervures moins espacées. Cette espèce, très-rare, a été rencontrée dans les calcaires marneux littoraux du bassin de Marseille (étage tongrien); son attribution générique laisse plus de doute que celle de l'empreinte

([1]) Regel, *Monogr. Bet.*, p. 55.
([2]) *Étude sur la vég. tert.*, II, p. 8; *Ann. Sc. natur.*, 5ᵉ série, t. III, p. 84, *Pl. III*, fig. 7.

de Koumi, qui me paraît dénoter sûrement un Bouleau. Une autre forme plus voisine, peut-être même similaire du *B. œgœa*, et qui de plus en a été contemporaine, est le *B. Ungeri* Andr. ([1]) (*B. Dryadum* Ung. ([2]), *non* Brong.), dont les feuilles sont seulement un peu plus grandes, un peu plus atténuées au sommet et pourvues sur les bords de dentelures plus égales et plus fines, avec sept nervures secondaires, au lieu de quatre ou cinq. Mais ce sont là d'assez faibles divergences, et l'espèce de Koumi ressemblait probablement beaucoup à celle de Radoboj, de Parschlug et de Bilin, dont il n'a été, du reste, jusqu'ici figuré que de rares spécimens. — La présence d'un Bouleau, au milieu des types africains si nombreux à Koumi, étonne au premier abord; cependant les Bouleaux se montrent et abondent quelquefois dans les localités synchroniques d'Armissan, de Manosque et de Radoboj, où existent en même temps des essences alliées à celles des tropiques, et qui se rattachent à Koumi par des liens incontestables. Ces Bouleaux miocènes, il faut le croire, bien que congénères des nôtres, indigènes des régions alpines et boréales, en différaient par leurs aptitudes et peut-être par leur aspect. Il est à peu près certain, selon moi, que le *Betula Dryadum* Brong., d'Armissan, était un véritable *Betulaster*. Il est plus difficile de se prononcer à l'égard de l'espèce de Koumi, représentée par une feuille unique, très-bien caractérisée, il est vrai, mais dont les autres organes, chatons et samares, nous sont encore parfaitement inconnus.

VII. — QUERCUS OREADUM.

(*Pl. II, fig.* 11.)

CARPINUS BETULOIDES Ung. (*sin minus ex parte*), *Foss. Fl. v. Kumi*, p. 24, tab. 3, fig. 29-31, et tab. 4, fig. 1-3.

Dans ma Note sur la *Flore fossile de Koumi,* communiquée en janvier 1868 à la Société géologique ([3]), j'avais exprimé des doutes au sujet des feuilles de cette localité attribuées par Unger à son *Carpinus betuloides,* doutes reposant sur la forme des dentelures aussi bien que

([1]) Voir *Foss. Fl. Siebenb. und d. Ban.*, p. 14, et Schimp., *Traité de Pal. vég.*, II, p. 570.
([2]) *Chl. protog.*, p. 117, tab. 84, fig. 2-5. — *Iconogr. pl. foss.*, p. 105, tab. 39, *fig.* 9-12.
([3]) Voir *Bull. Soc. géol.*, 2e série, t. XXV, p. 319, séance du 20 janv. 1868.

sur l'aspect général et le mode de nervation de ces feuilles, qui ne justifient nullement la manière de voir du savant professeur viennois. J'ai été confirmé dans mon opinion par la découverte, dans la collection due à M. Gorceix, d'une feuille visiblement pareille à celles qui constituent le *Carpinus betuloides* de Unger, et que j'ai pu étudier avec d'autant plus de soin que son état de conservation, sauf une déchirure sur l'un des côtés, ne laissait rien à désirer. C'est cette feuille que je figure ici avec les détails du réseau veineux (*fig.* 11 *b*), scrupuleusement rendus, et de plus avec un fruit d'Araliacée, qui se trouve décrit ci-après, et qui est situé le long du bord supérieur de la déchirure. Cette feuille est exactement semblable aux *fig.* 30 et 31, *Pl. III*, et 2, *Pl. IV*, de la *Flore fossile de Koumi*, par Unger; il est fort possible du reste que, sous cette dénomination, plusieurs feuilles, n'ayant fait partie ni de la même espèce ni peut-être du même genre, aient été arbitrairement réunies; mais, en s'en tenant aux spécimens les plus conformes à celui que je désigne sous le nom de *Quercus Oreadum*, on voit clairement que les dents du bord sont simples et qu'elles correspondent aux nervures secondaires qui viennent s'y rendre; beaucoup plus rarement il existe une dent intermédiaire, plus faible, à laquelle correspond une branche détachée de l'une des nervures principales. Celles-ci sont presque toujours alternes, au nombre de neuf à dix paires, obliques, un peu ascendantes, surtout dans le bas, et parallèles entre elles. Dans l'intervalle assez étroit qui sépare ces nervures s'étend un réseau très-fin, composé de veines transverses, multipliées, la plupart simples, d'autres fois bifurquées, reliées entre elles par des veinules déliées qui courent en sens inverse, se bifurquent et s'anastomosent. Ce réseau, jusque dans les moindres détails visibles à la loupe, est absolument conforme à celui des Chênes asiatiques de la section *Cyclobalanus*, qui comprend des espèces à feuilles entières et d'autres à feuilles dentées, dont la ressemblance, tout à fait frappante, ne saurait être trompeuse. C'est surtout des *Quercus turbinata* Bl. (*Q. Merkusii* Endl.), de Java, *oxyodon* Miq., des Indes orientales, *semiserrata* Roxb., aussi des Indes, *glauca* Thunb. et *annulata* Sm., le premier du Japon, l'autre du Népaul, que le *Quercus Oreadum* de Koumi se rapproche visiblement. — Cette section de Chênes exotiques, particulière aux parties chaudes et tempérées de l'ancien continent, a dû posséder des représentants euro-

péens à l'époque tertiaire. Les espèces tertiaires dont le *Q. furcinervis* Rossm. est le type, et qui paraissent n'avoir été décrites jusqu'ici que d'une façon confuse, ont tout à fait l'aspect des *Cyclobalanus* à feuilles dentées. C'est auprès de ce même type que je range le *Q. ægæa*, et je grouperais autour de lui plusieurs autres formes encore inédites, si je ne craignais de sortir ainsi des bornes d'une simple Notice.

VIII. — PERSÆA GRÆCA.

(*Pl. II, fig.* 16.)

LAURUS LALAGES Ung. (*saltem ex parte*), *Fl. foss. v. Kumi,* tab. 7, fig. 36! et 37!

Parmi les feuilles de Koumi assimilées par Unger au *Laurus lalages*, de Sotzka (¹), dont j'ai moi-même signalé la présence à Armissan, il en est une au moins qui semble s'écarter des autres par une forme plus allongée et un nombre plus considérable de nervures secondaires, dix-huit au lieu de douze. Cette feuille, et peut-être aussi quelques autres de celles qui lui sont associées, doivent être distraites, selon moi, du *Laurus lalages,* pour être réunies à l'une des plus belles empreintes recueillies par M. Gorceix, et constituer ensemble une espèce tout à fait digne d'attention.

M. Unger, dans sa *Flore de Sotzka,* considère le *Laurus lalages* comme ayant appartenu aux *Laurus* proprement dits; la Laurinée de Koumi, dont je figure un spécimen si parfait, présente visiblement des caractères qui l'éloignent au contraire des Lauriers et permettent de la ranger auprès des *Persea,* et en particulier du *Persea indica* Spr., la plus remarquable des Laurinées canariennes. — Rien ne manque à la feuille reproduite *fig.* 16, *Pl. II;* le limbe et le pétiole sont intacts; elle est grande et bien développée et montre sa face inférieure, où les moindres détails du réseau veineux sont perceptibles. Le crayon est malheureusement impuissant à rendre des linéaments aussi complexes et aussi délicats. La longueur totale est de 14 centimètres, y compris le pétiole, qui mesure seulement 13 millimètres; il est court et grêle relativement; le bord est parfaitement entier, mais un peu ondulé; la forme générale est lancéolée, atténuée-obtuse aux deux extrémités; la

(¹) *Foss. Fl. v. Sotzka,* p. 39, tab. 19, fig. 6-9.

plus grande largeur existe vers le tiers supérieur, c'est-à-dire que la feuille est plus longuement amincie vers la base que vers le sommet. Sur les côtés d'une nervure médiane saillante, mais assez mince, sont disposées environ dix-huit paires de nervures secondaires, émises sous un angle très-ouvert, droites, puis légèrement recourbées, ascendantes le long de la marge ou repliées en arc, et réunies à l'aide de mailles successivement décroissantes. Quelques nervures abrégées (*nervi secundarii abbreviati*) courent çà et là, surtout vers le bas, dans l'intervalle des précédentes. Des veines transverses, légèrement flexueuses, simples ou ramifiées et anastomosées à l'aide de ramules diversement repliés, sont disposées entre les nervures secondaires; le réseau veineux qui serpente entre les nervures tertiaires est formé par des nervilles de quatrième et de cinquième ordre, ramifiées et dirigéés à angle droit les unes sur les autres. Tout cet ensemble est absolument conforme à ce que montrent les feuilles des Laurinées en général et celles des *Persea* en particulier.

Cette feuille, comparée à celle du *Persea indica*, et entre autres à des spécimens rapportés de Madère par M. Heer, manifeste une telle conformité de caractères avec ces derniers, qu'on est porté à la considérer comme représentant une simple variété du *Persea indica* plutôt qu'une espèce plus ou moins distincte. L'analogie la plus complète ressort de l'aspect général, aussi bien que de l'ordonnance des nervures principales, de leur direction, de leur manière de se ramifier et de s'anastomoser, enfin des moindres détails du réseau veineux. Je ne saurais signaler, en fait de différences, que la base plus amincie, la terminaison supérieure plus courte et plus obtuse et des nervures secondaires plus nombreuses vers les deux extrémités de la feuille. La dimension du pétiole est à peu près pareille des deux parts; l'organe est cependant un peu plus court et moins épais dans la forme fossile que dans celle de nos jours.

Le *Persea græca*, si voisin du *P. indica* Spr., doit par cela même se rapprocher du *P. typica* Sap. (1), d'Armissan, dont j'ai figuré un si bel exemplaire. On voit, en comparant entre elles les formes respectives des deux localités, que la feuille de Koumi ressemble à celles d'Armissan

(1) *Étude sur la vég. tert.*, II, p. 271; *Ann. Sc. nat.*, 3e série, t. IV, p. 127, *Pl. VII*, fig. 8.

par la base atténuée, ainsi que par la dimension du pétiole, et s'en écarte par la terminaison plus obtuse du sommet. Ce sont là, au total, de bien faibles divergences, et si l'on possédait de ces Laurinées fossiles d'autres organes que des feuilles éparses, on serait sans doute amené à reconnaître en elles de simples races, trop peu éloignées de l'espèce actuelle pour en être distinguées, sinon à titre de variété locale. Ainsi, d'après ce point de vue, que je crois très-rapproché de la réalité, le *Persea indica* Spr., autrefois répandu dans toute la région méditerranéenne, aurait compris à titre de races les *Persea typica* et *græca;* ces derniers ont plus tard disparu du continent européen, tandis que les circonstances ont favorisé la forme canarienne, revêtue des nuances qui lui sont propres, et lui composent une physionomie particulière. Ce sont là des faits qu'il est donné au botaniste de saisir, du moins d'entrevoir, à chaque pas qu'il fait dans l'étude des espèces qui occupent une vaste étendue de pays. Le Platane d'Orient comparé à celui d'Amérique, le Cèdre de l'Himalaya comparé à celui du Liban et ce dernier au Cèdre de l'Atlas, les *Pistacia khinjuk* Stochs, *palæstina* Boiss., *sphærocarpa* D. C., avec le type normal du *P. terebinthus*, présentent des exemples, que l'on multiplierait aisément, de ces sous-espèces, races ou variétés locales, qui partagent en plusieurs groupes connexes et vagues, bien que peu définissables, l'ensemble des individus d'une même espèce. Un phénomène du même ordre doit exister et existe effectivement, lorsque, au lieu de comparer entre elles les formes végétales du monde vivant, on les met en parallèle avec celles des époques immédiatement antérieures à la nôtre, dont celle-ci n'est évidemment qu'un prolongement plus ou moins modifié, mais aussi plus ou moins solidaire.

IX. — LITSÆA DELPHICA.

(*Pl. II, fig.* 7 *a* et *b.*)

DAPHNOGENE DELPHICA Sap., *Fl. foss. de Koumi et d'Oropo,* p. 4, *Pl. LXIII,* fig. 6.

FICUS AGLAJÆ Ung., *Reis. in Griechl.*, p. 161, fig. 15. — *Foss. Fl. v. Kumi,* p. 29, *Pl. IV,* fig. 31-35.

Il me paraît difficile de ne pas admettre la parfaite identité spécifique du *Ficus Aglajæ* de Unger et de mon *Daphnogene delphica* avec

les deux empreintes de feuilles superposées provenant de la collection Gorceix, dont je donne ici une figure très-exacte. La parfaite conservation de l'exemplaire recueilli par M. Gorceix permet d'affirmer qu'il ne saurait être question d'une attribution au genre *Ficus;* la trace des cryptes ou points verruqueux, parfaitement visibles à l'aisselle des nervures basilaires, ainsi que la disposition des nervures de divers ordres, démontre au contraire qu'il s'agit bien, comme je l'avais présumé, d'une Laurinée, que je suis porté maintenant à ranger parmi les *Litsœa,* déjà signalés plus d'une fois à l'état fossile. C'est effectivement ce que prouve le *Litsœa magnifica* Sap. (¹) d'Armissan, et le *Litsœa microphylla* (²) Mar. Le *Litsœa delphica* se distingue surtout par l'ordonnance irrégulièrement triplinerve de ses feuilles, supportées par un long pétiole. Leur forme est ovale-oblongue, lancéolée, atténuée au sommet, obtuse à la base; les nervures basilaires sont séparées des autres secondaires par un intervalle plus ou moins marqué; elles sont ascendantes, suivent le bord ou même se confondent parfois avec lui et se prolongent plus ou moins. Les autres secondaires sont au nombre de plusieurs paires alternes et recourbées ascendantes. Le réseau veineux est très-fin et composé de veines transversalement flexueuses. La consistance était sans doute plutôt membraneuse que coriace. Les espèces les plus analogues que je connaisse sont les *Litsœa glauca* Sieb. et *umbrosa* Nées, le premier du Japon, le second du Silhet.

X. — DIOSPYROS GRÆCA.

(*Pl. II, fig.* 7 *c* et 13.)

Royena græca Ung., *Foss. Fl. v. Kumi,* p. 44, tab. 11, fig. 40-50 (*excl. folio* fig. 51).

M. Unger a donné le nom de *Royena græca* à des calices de consistance coriace, ouverts et caducs, privés ou non de leur pédoncule, souvent vides, quelquefois entourant un fruit arrondi, quadriloculaire, à ce qu'il paraît, qui présentent cinq segments allongés, à préfloraison évidemment quinconciale et qui sont parcourus de stries longitudi-

(¹) *Étude sur la vég. tert.,* II, p. 280, *Pl. VII,* fig. 6.—*Ann. Sc. nat.,* 5ᵉ série, t. IV, p. 136.

(²) *Pl. foss. de Ronzon,* p. 23, *Pl. XXII,* fig. 17-18. — *Ann. Sc. nat.,* 5ᵉ série, t. XIV, 6ᵉ cahier.

nales à l'intérieur, tandis que leur face extérieure est marquée de rugosités transverses plus ou moins prononcées. La dénomination générique de *Royena* entraine une assimilation de ces calices et d'une feuille douteuse, réunie sans preuve à la même espèce, au sous-genre *Royena*, type austro-africain, qui se distingue des *Diospyros* proprement dits par des fleurs hermaphrodites, un calice constamment quinquéfide, une corolle à limbe réfléchi et enfin un style simple ou seulement bifide. Il est loin d'être certain que l'espèce fossile en question ait possédé ces divers caractères, tandis qu'il est infiniment probable qu'elle a constitué une Ébénacée alliée de fort près aux *Diospyros* actuels, et plus particulièrement à une section à calices extérieurement rugueux et souvent pentamères, qui habite aujourd'hui l'Asie méridionale et les îles de l'archipel indien. Il me paraît donc plus sûr de conserver le nom générique de *Diospyros* aux calices de Koumi, qui sont loin du reste de se trouver isolés au milieu de la végétation tertiaire, puisqu'ils se rattachent évidemment à tout un groupe de *Diospyros* fossiles européens, dont le *Diospyros rugosa* Sap. est le type. C'est là surtout le point sur lequel je vais insister, en m'autorisant de la présence de l'un de ces calices dans la collection de M. Gorceix.

Ces organes offrent en effet l'aspect, la structure, le mode de préfloraison et les rugosités extérieures de ceux de la flore des gypses d'Aix, que j'ai nommés *Diospyros rugosa* et sur lesquels je reviens dans un supplément à cette flore, actuellement sous presse. Leur fréquence a permis de les examiner sous toutes les faces et de reconnaître le style ordinairement trifide qui persiste au-dessus de l'ovaire fécondé. Les fruits sont arrondis ou oblongs, selon les espèces, et ordinairement plus petits que les calices qui leur servaient d'involucre et se détachaient de l'arbre après la chute du fruit, lors de sa maturité. Il n'est donc pas douteux pour moi que les calices de Koumi n'aient été congénères de ceux d'Aix et n'aient, au même titre que ces derniers, appartenu à une section du genre *Diospyros*, caractéristique pour la végétation européenne, à un moment donné de la période tertiaire.

Il a été plus difficile jusqu'ici de préciser les feuilles de ces mêmes espèces de *Diospyros*. A cet égard, le rapprochement tenté par Unger ne me semble pas heureux. La feuille qu'il réunit aux calices épars de son *Royena græca* est petite, sans caractère d'aucune sorte, et sa res-

semblance apparente avec celles du *Royena brachiata* E. Mey. ne saurait suffire pour justifier son attribution. Dans la flore des gypses d'Aix il existe plusieurs feuilles de physionomie très-différente, qui se rangent naturellement parmi les *Diospyros;* mais, justement à cause de cette pluralité, il n'est guère possible de décider quelles sont celles qui doivent être réunies aux calices rugueux en question. J'ai cherché cependant à reconnaître si, parmi les empreintes de feuilles recueillies par M. Gorceix, il ne s'en trouverait pas d'analogues à l'une des feuilles de *Diospyros* observées dans la flore d'Aix. Cette manière de procéder offrait quelque chance de déterminer la nature des feuilles que possédaient les *Diospyros* à calices rugueux; en tous cas, c'était la seule plausible. — Sans avoir la prétention de résoudre d'emblée une pareille question, je reproduis ici (*fig.* 10) une feuille qui m'a paru dès l'abord offrir tous les caractères des *Diospyros* tropicaux, particulièrement de plusieurs de ceux de l'Inde et de Maurice, mais qui de plus rappelle prodigieusement le *Diospyros præcursor* Sap., feuille inédite des gypses d'Aix, et se rapproche beaucoup aussi du *Diospyros varians* Sap. ([1]), si répandu en Provence, depuis le tongrien de Saint-Jean-de-Garguier jusque dans l'aquitanien de Manosque. La feuille d'Aix est plus petite, mais elle présente les mêmes caractères de forme et de nervation. Les feuilles de Manosque, très-variables, comme leur nom l'indique, sont moins régulièrement elliptiques; mais c'est évidemment, lorsqu'on les considère, le même type, légèrement modifié, que l'on a sous les yeux. Quant aux calices rugueux de Koumi, ils diffèrent visiblement de ceux d'Aix par la forme plus allongée et plus atténuée des segments. On voit en les examinant que l'on a devant soi une espèce distincte de celles des gypses d'Aix, que le temps ou la distance, ou bien encore ces deux facteurs combinés aient été la cause réelle de cette divergence.

XI. — ARALIA DETECTA.

(*Pl. II, fig.* 11 *a.*)

Le fruit sur lequel je base cette espèce est fort petit, puisque sa plus grande longueur n'excède pas 2 millimètres. Je l'ai découvert sur la

---

([1]) Voir *Étude sur la vég. tert.*, II, p. 107, et III, p. 91. — *Ann. Sc. nat.*, 5e série, t. III, *Pl. IV*, fig. 14 et 6, fig. 4; t. VIII, *Pl. X*, fig. 7-8.

Exam

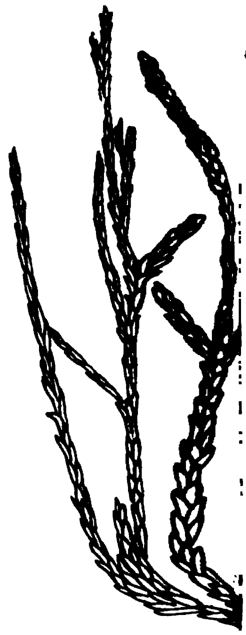


Fig.1

Fig 11a

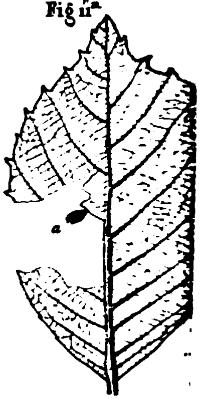


Fig. 11.

Leguy, Imp. rue de la Bucherie, 1.

même plaque que le *Quercus Oreadum*, couché le long des bords d'une déchirure, ainsi que le montre la figure que je donne (*Pl. II*, *fig.* 8 en *a*). La figure *a'* représente le même organe sous un assez fort grossissement et permet d'en saisir tous les caractères. La structure est évidemment celle d'un fruit d'Araliacée. La forme générale est ellipsoïde, le sommet est tronqué, surmonté d'un disque épigyne, court et conique, terminé par deux styles simples et divergents. Les Araliacées ont presque constamment autant de styles que de loges dans l'ovaire et plus ordinairement cinq à sept. Cependant les *Panax*, ainsi que les *Didymopanax*, n'ont que deux loges dans le fruit et deux styles ; les *Cussonia* ont souvent aussi deux loges dans le fruit et deux styles divergents sur un disque épigyne conique. Ce serait de ce dernier genre que se rapprocherait par ses caractères visibles le fruit fossile que je décris et qui pourrait bien être celui d'un *Cussonia*. Deux ordres de faits tendraient à le prouver : le premier est la présence à Koumi d'une magnifique Araliacée, dont M. Unger a figuré une feuille entière, sous le nom de *Cussonia polydrys*, et dont l'*Aralia detecta* pourrait bien être le fruit; en second lieu, j'ai découvert tout dernièrement, dans les gypses d'Aix, un fruit similaire de celui de Koumi, surmonté comme lui de deux styles un peu divergents, couronnant un disque épigyne en cône obtus. Ce fruit, que j'ai nommé *Aralia calyptrocarpa*, est visiblement congénère de celui de Koumi; il indique, comme ce dernier, l'existence d'un groupe ancien d'Araliacées européennes, allié de près aux *Cussonia*, distinct peut-être d'eux à quelques égards, et dont les rares débris ne sont que plus curieux à rechercher et à déterminer. A côté de l'*Aralia calyptrocarpa*, j'ai recueilli dans les gypses d'Aix de magnifiques empreintes de feuilles palmées, subdigitées, voisines à la fois des *Oreopanax* et des *Cussonia* (*Aralia multifida* Sap.), qui devront être réunies sans doute à ce fruit. Lorsque ces éléments encore épars et flottants se seront rejoints et soudés, on pourra définir plus exactement la nature et les affinités de ce genre tertiaire, auquel la dénomination de *Palæopanax* conviendrait très-bien, si les prévisions que je viens d'exprimer se trouvaient un jour justifiées.

XII. — CELASTRUS GORCEIXI.

(*Pl. II, fig.* 12.)

Il est naturel de ranger parmi les *Celastrus* cette feuille, qui en possède les caractères, et l'étude du réseau veineux confirme cette attribution. Cependant il existe très-peu de feuilles de ce genre chez lesquelles les nervures secondaires soient disposées d'une façon aussi peu oblique. C'est dans la flore d'Abyssinie que j'ai observé les formes les plus voisines de celle-ci. Je citerai le *Celastrus Schimperi* comme plus particulièrement analogue; les feuilles de cette espèce, qui croît sur les coteaux desséchés, sont seulement plus ovales, tandis que celle du *Celastrus Gorceixi* est ellipsoïde, obtuse et probablement mucronulée au sommet. Le pétiole a des deux parts la même forme et la même dimension; les dentelures sont pareilles, mais les nervures secondaires de la feuille fossile sont plus nombreuses et émises sous un angle encore plus ouvert. — Cette espèce diffère des *Celastrus Persei* Ung., *brevifolius* Heer et *oxyphyllus* Ung., qui lui sont associés dans la flore de Koumi; elle est dédiée à M. Gorceix, à qui en est due la découverte.

Il ressort plusieurs enseignements de l'examen que je viens de faire d'un certain nombre d'espèces de la flore de Koumi; je puis même avancer, sans crainte d'un démenti, que les résultats seraient les mêmes si l'examen, au lieu d'être partiel, avait porté sur l'ensemble. On peut d'abord formuler cette loi générale : que les rapports qui lient les espèces anciennes à celles du monde actuel n'ont rien d'arbitraire, mais dépendent de causes très-compliquées, qui ont agi successivement de manière à produire des effets très-divers, mais non cependant contradictoires.

Il est naturel de constater en premier lieu que plusieurs espèces anciennes diffèrent très-peu, et seulement à titre de variété ou de race, d'espèces vivantes, encore aujourd'hui cantonnées dans la même région ou à portée de la même région, soit le long de ses frontières, soit dans des îles qui en dépendent plus ou moins. Voici l'énumération des principales espèces de cette catégorie :

Espèces fossiles de Koumi.	*Espèces vivantes correspondantes.*
Callitris Brongniartii Endl..	Callitris quadrivalvis Vent. (Algérie et Maroc).
Alnus Sporadum Ung......	Alnus subcordata C.-A. Mey. (Asie-Mineure et Caucase).
Quercus mediterranea Ung.	Quercus pseudo-coccifera Derf. (Asie-Min., Europe méridion.).
Planera Ungeri Ett........	Planera (Zelkova) Richardi Mich. (Asie-Min., Crète, Caucase).
Populus hellenica nob. (1)..	Populus canescens Sm. (Europe).
Persea græca Sap.........	Persea indica Spr. (Canaries).
Nerium Gaudryanum Brngt.	Nerium oleander L. (Europe méridionale).

Dans les cas précédents, les espèces actuelles ne sont sans doute que des prolongements peu modifiés des espèces anciennes. Les unes sont restées sur place, et quant à celles qui ont quitté le sol même de la Grèce, par suite d'une élimination, pour ainsi dire, locale, on les retrouve croissant à quelque distance, soit à l'intérieur, soit à portée du bassin de la Méditerranée. — Mais à la suite de ces espèces on en observe d'autres, qu'il est difficile de séparer des premières, en ce qui concerne la marche qu'elles ont dû suivre et leur filiation présumée ; et cependant pour retrouver de nos jours des traces de ces espèces, c'est-à-dire des formes qui leur soient similaires, il faut s'éloigner notablement du bassin méditerranéen, dans l'une ou l'autre direction, et franchir non-seulement des centaines, mais des milliers de lieues. Le phénomène est pareil, mais la distance entre la station antérieure et l'aire géographique actuelle étant très-grande, si l'on veut appliquer à la marche supposée de ces espèces le même raisonnement théorique qu'aux autres, il faut nécessairement admettre que des causes d'exclusion plus énergiques, plus universelles, peut-être remontant plus haut dans le passé, ont amené le résultat que l'on constate aujourd'hui. Dans cet ordre de faits, nous distinguons encore deux catégories, chacune d'elles devant être l'objet d'un examen séparé. L'une de ces catégories comprend en première ligne le *Glyptostrobus europæus* Heer et le *Sequoia Tournalii* Sap. Il s'agit dans ce cas d'espèces autrefois très-diffuses, ayant occupé à un

---

(1) Je désigne ainsi un peuplier de Koumi, figuré par Unger sous le nom de *P. attenuata* et qui n'a en réalité rien de commun avec le *P. attenuata* Heer, d'Œningen. Ce peuplier est plutôt voisin du *P. crenata* Ung., de Radoboj, et comme celui-ci il vient se placer entre les *Populus alba* et *tremula*, à côté du *P. canescens* Sm., dont il diffère fort peu.

moment donné, à ce qu'il semble, notre hémisphère tout entier, mais qui, par un phénomène dont il nous est donné surtout d'apprécier les effets, ont suivi plus tard une marche rétrograde, de sorte que ces essences, se retirant peu à peu de la plupart des points où elles dominaient originairement, ne se sont maintenues que dans des stations très-limitées, où leur existence semble même menacée de nos jours. — C'est donc le même fait que précédemment, un fait d'élimination, opéré seulement sur une plus vaste échelle et de façon que le retrait, au lieu de repousser la plante à quelques centaines de lieues, comme pour le *Callitris* et le *Persea*, l'ait ramenée en Chine ou en Californie, à l'extrémité de l'un ou l'autre des deux continents.

Dans la deuxième catégorie, le phénomène est encore le même : il accuse au moins autant les effets de la distance. Les formes similaires de celles auxquelles nous faisons allusion se rencontrent sur des points toujours très-éloignés de celui où existaient les formes fossiles correspondantes, seulement ce ne sont plus des ressemblances tellement frappantes qu'elles entraînent la pensée d'une filiation directe et réciproque; l'affinité est toujours sensible, mais elle n'est pas aussi intime et la différence spécifique est plus aisée à établir, comme de nos jours entre des espèces américaines, africaines ou asiatiques congénères, voisines à coup sûr, distinctes cependant.

Les espèces de Koumi qui se rangent dans cette dernière catégorie sont, entre autres, les suivantes :

Espèces fossiles de Koumi.	*Espèces actuelles correspondantes.*
Widdringtonia kumensis Sap.............	Widdringtonia juniperoides Endl. (Cap).
Podocarpus taxites Ung..................	Podocarpus elongata L. (Cap).
Myrica oxydonta Sap.....................	Myrica serrata Lam. (Cap).
Betula ægæa Sap.........................	Betula dahurica Reg. (Amur, Daourie).
Quercus Oreadum Sap....................	Quercus glauca Thb. (Japon).
Cinnamomum Scheuchzeri Heer...........	Cinnamomum pedunculatum Thb. (Japon).
Cussonia polydrys Ung....................	Cussonia spicata Thb. (Cap).
Celastrus Gorceixi Sap....................	Celastrus Schimperi Hoscht. (Abyssinie).

On voit combien le cercle de ces affinités, déjà moins étroites, s'étend de manière à tracer une limite concentrique extérieure par rapport à la première. Ce sont des formes régionales, des sections de genres, des

types doués d'une physionomie caractéristique qui dénotent autant de liens entre Koumi et les contrées où on les observe maintenant, et qui prouvent que la communauté, l'échange, si l'on peut s'exprimer ainsi, des formes végétales était alors possible entre ces pays et l'Europe.

Le tableau des parentés dont je viens d'ébaucher les traits resterait trop incomplet, même pour une simple Notice, si, avant de la terminer, je ne touchais quelques mots d'un autre ordre de phénomènes plus obscurs, mais non moins intéressants : je veux parler des liens réciproques des flores tertiaires entre elles et des conséquences qui en résultent, soit pour indiquer la marche successive de la végétation européenne, ses progrès durant un temps, ses pertes d'abord suivies de nouvelles acquisitions, ensuite définitives, soit pour faire voir comment il résulte de cette marche une distribution géographique tout à fait en rapport avec celle des végétaux actuels, dont l'affinité avec ceux de Koumi est faite pour nous frapper. Une partie au moins des éléments végétaux observés à Koumi étaient anciens, au milieu de l'ensemble dont ils faisaient partie, et remontaient à un âge bien antérieur à celui où les plantes de cette localité passèrent à l'état fossile. Ce qui le prouve, c'est qu'on les rencontre déjà dans les gypses d'Aix qui se rapportent à l'éocène supérieur, tandis que Koumi, certainement postérieur au tongrien, se range très-naturellement dans l'aquitanien, sur le niveau géognostique de Radoboj, d'Armissan et de Manosque. Les preuves à cet égard seraient faciles à donner et je n'y insiste pas, renvoyant, pour tous les détails, à mes deux Notices antérieures [1], où cette question se trouve traitée et, je crois aussi, résolue.

Bien que la végétation de Koumi se trouvât en réalité séparée de celle d'Aix, non-seulement par un espace continental assez vaste, mais plus encore par l'intervalle de temps considérable auquel a correspondu le dépôt de l'étage tongrien, cependant les types dont l'énumération suit demeurent communs aux deux flores; ces types, déjà vieux en Europe à l'époque de Koumi, avaient été transmis à cette localité comme un legs provenant des âges antérieurs.

---

[1] *Plantes foss. de Koumi et d'Oropo*, inséré dans le grand Ouvrage de M. Gaudry intitulé : *Animaux fossiles et Géologie de l'Attique*. — *Note sur la flore fossile de Koumi* (*Eubée*); *Bull. Soc. géol.*, 2e série, t. XXV, p. 315.

Espèces des gypses d'Aix.	*Espèces correspondantes de Koumi.*
Widdringtonia brachyphylla Sap.	Widdringtonia Kumensis Sap.
Callitris Brongniartii Endl......	Callitris Brongniartii Endl.
Quercus antecedens Sap........	Quercus mediterranea Ung.
Cinnamomum lanceolatum Ung..	Cinnamomum lanceolatum Ung.
Lomatites aquensis Sap........	Lomatites (Grevillea Ung.) kymeanus Sap.
Laurus primigenia Ung........	Laurus primigenia Ung.
Diospyros rugosa Sap..........	Diospyros græca Sap.
Aralia multifida Sap...........	Aralia (Cussonia) polydrys Ung.

Des liens de cette sorte, dont les flores tertiaires de tous les étages fournissent constamment des exemples, sont une preuve que dans aucun temps la végétation européenne ne s'est jamais modifiée, soit dans les espèces, soit dans les types caractéristiques qu'elle comprenait, sinon lentement et partiellement, par une marche graduée et, pour ainsi dire, insensible. Le même mouvement, agissant partout de la même façon, a dû partout aussi amener des résultats sensiblement conformes. Armissan et Manosque, dans le midi de la France, sont des localités certainement contemporaines de Koumi; eh bien! de part et d'autre les mêmes événements se produisent : le *Sequoia Tournalii* et le *Glyptostrobus europœus* se sont introduits et abondent; les *Callitris* et *Widdringtonia* existent au second plan; les Laurinées et les Myricacées, en Provence aussi bien qu'en Grèce, dominent par la fréquence et par la beauté des formes. Le *Persea typica* d'un côté, le *Persea græca* de l'autre, reproduisent à peu de chose près le *Persea indica ;* les *Cinnamomum* se mêlent aux *Myrica* à feuilles grandes, allongées, coriaces; les Bouleaux, les Aunes, les Peupliers, les Érables commencent à se multiplier, et ce sont dans les deux régions les mêmes espèces ou des espèces équivalentes qui représentent ces genres. — Ce n'est pas seulement à Koumi que l'on observe des formes d'affinité africaine, sud-asiatiques ou est-asiatiques : c'est à Armissan et à Manosque, c'est aussi en Suisse où, entre autres, le *Myrica oxydonta* se trouve suppléé par le *M. Graeffii,* qui se confond peut-être avec lui. Le type des *Alnus orientalis* et *subcordata* ne se montre pas seulement à Koumi, il s'étend à l'Europe entière, et il en est absolument de même du *Zelkova* et du *Liquidambar* tertiaires. — Il faut admettre que des communications diverses, changeant selon les époques, quelquefois longtemps prolon-

gées, ont ouvert un libre accès à ces échanges de types, à ces migrations, à ces extensions, dont on suit confusément les vestiges, dont on constate les effets, mais dont les causes précises et particulières nous échappent, à raison même de leur multiplicité! — Une sorte de fil conducteur, perdu dans une foule de cas, mais parfois saisissable, permet d'obtenir la signification plausible de quelques-uns des faits que l'on observe. Ainsi, une fois que l'on rencontre des *Persea* à Koumi, il est naturel de les retrouver plus loin, en Autriche, en Suisse, en Provence, c'est-à-dire dans la direction de l'Occident, où ce type a encore aujourd'hui son séjour. Ces points constituent autant d'étapes intermédiaires qui nous rapprochent des Canaries, de même que maintenant cet archipel marque un poste avancé pour les *Persea*. Que les Canaries disparaissent au sein des eaux ou que leur sol soit entièrement dévasté par l'homme, et le type des *Persea* sera définitivement éliminé de ce côté de l'Atlantique. Ainsi ont fait autrefois la plupart des genres de la flore tertiaire européenne : gagnant dans une direction déterminée, ils se sont, à l'aide du temps, étendus aussi loin que les circonstances le leur permettaient, et ils ont pu s'établir dans des régions qui leur avaient été d'abord fermées; mais, de même que ces genres ont pu rétrograder après s'être avancés plus ou moins, ils ont pu aussi périr plus tard dans leur patrie d'origine et se maintenir au contraire là où primitivement ils n'étaient venus qu'en qualité d'immigrants. — Rien ne nous assure, par exemple, que les *Sequoia* n'aient pas eu autrefois l'Europe pour premier berceau et qu'au lieu de finir en Californie, après y être nés, ils ne s'y soient pas réfugiés, rencontrant là seulement un asile relativement favorable à leur race, disparue de partout ailleurs. — C'est, je le crois, de l'ensemble de ces fluctuations, au milieu desquelles l'espèce ne devient qu'un accident secondaire, que dépend la végétation de chaque époque, et, dans chaque époque, celle de chaque contrée. En arrivant à de pareilles conclusions et les considérant comme vraies, nous sommes entraînés bien loin, il faut l'avouer, de l'ancienne hypothèse, admettant le renouvellement périodique des êtres et l'origine récente des espèces actuellement vivantes. Celles-ci ne sont, au contraire, pour nous que les descendants très-peu changés des végétaux tertiaires, de ceux d'entre eux auxquels il a été donné d'échapper aux causes multiples de destruction qui ont agi

à travers le temps. Leurs ancêtres européens ont vécu associés à des types de physionomie exotique, eux-mêmes proches alliés de ceux des régions chaudes qui nous entourent. Les uns comme les autres ont été parfois fort peu modifiés par le temps, et dans ce cas les anciens sont aux plus récents ce que les variétés et les races sont entre elles dans les limites d'un même type. Si la nature de beaucoup d'espèces est flottante et mal déterminée, les rapports exacts des espèces tertiaires et des nôtres ne sont pas plus aisés à définir. Mais comment ces changements se sont-ils opérés, par quelle voie, sous l'empire de quelle cause, rapide ou lente, à l'aide de phénomènes locaux et par des variations partielles ou par suite de phénomènes généraux? — C'est ce que nous ignorons profondément, heureux de toucher un coin du voile et d'en soulever quelques plis.

NOTE

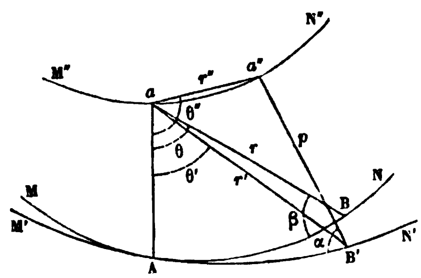
SUR UN

PROBLÈME DE CINÉMATIQUE,

PAR M. PHILLIPS,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

On sait que M. Airy a fait voir que la méthode des enveloppes et celle des roulettes, pour déterminer deux profils conjugués d'un engrenage plan, reviennent au fond l'une à l'autre, et c'est ce qu'il a fait en démontrant que, étant données deux courbes planes quelconques M'N' et M''N'', on peut toujours trouver une autre courbe MN qui soit telle que,



MN roulant sur M'N', un point a relié invariablement à MN décrive la courbe M''N''. La seule condition nécessaire est que les normales, menées par les différents points de M'N' à M''N'', rencontrent cette dernière courbe. Il a donné, en même temps, le moyen de déterminer cette courbe MN.

Cette question suggère le problème suivant, qui fait l'objet de cette Note : Étant données deux courbes quelconques MN et M''N'', trouver

une courbe M′N′ qui soit telle que, MN roulant sur M′N′, un point a relié invariablement à MN décrive la courbe M″N″.

La droite aA, qui joint a au point de contact actuel A des deux courbes MN et M′N′, est normale en a à la courbe M″N″. Prenons a pour pôle et aA pour axe polaire.

Soient B, dont les coordonnées polaires sont r et θ, un point quelconque de MN et B′, dont les coordonnées polaires sont r' et θ', le point de M′N′ avec lequel le point B doit plus tard coïncider. Soit B′a'' la normale à M″N″, menée du point B′. Soient r'' et θ'' les coordonnées polaires de a''. Désignons enfin : par p la longueur de la normale B′a''; par α l'angle sous lequel cette normale rencontre la courbe M′N′ en B′ et par β l'angle sous lequel le rayon vecteur aB rencontre la courbe MN en B. Quand le contact des deux courbes MN et M′N′ a lieu en B′, le rayon vecteur aB coïncide exactement avec la normale B′a'', et l'on a

$$r = p \quad \text{et} \quad \beta = \alpha.$$

La courbe MN étant donnée, on a

$$\tang \beta = f(r),$$

$f(r)$ étant une fonction connue de r; par suite on a

$$\tang \alpha = f(p). \tag{1}$$

Soient t' l'angle formé par le rayon vecteur aB′ avec la tangente à M′N′ en B′ et t'' l'angle formé par le rayon vecteur aa'' avec la tangente à M″N″ en a''.

Le triangle aa''B′ donne

$$p = \sqrt{r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos(\theta'' - \theta')}. \tag{2}$$

Dans le même triangle, l'angle aa''B′ $= 90° + t''$; d'où

$$p : r' :: \sin(\theta'' - \theta') : \cos t''.$$

On déduit de là, en ayant égard à l'équation (2),

$$\frac{r'^2 \sin^2(\theta'' - \theta')}{\cos^2 t''} = r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos(\theta'' - \theta'), \tag{3}$$

équation qui revient à

$$\text{(I)} \qquad r'^2 \sin^2(\theta''-\theta')\left(1+\frac{r''^2\,d\theta''^2}{dr''^2}\right)=r'^2+r''^2-2r'r''\cos(\theta''-\theta').$$

D'un autre côté, on a

$$\alpha = t' + a\mathrm{B}'a'',$$

ou, en mettant pour $a\mathrm{B}'a''$ sa valeur donnée par le triangle $a\mathrm{B}'a''$,

$$\alpha = t' + 180^\circ - (90^\circ + t'') - (\theta''-\theta'),$$

ou enfin

$$(4) \qquad \alpha = 90^\circ - (t''-t') - (\theta''-\theta').$$

On tire de là, en développant,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1+\operatorname{tang}t''\operatorname{tang}t' - (\operatorname{tang}t''-\operatorname{tang}t')\operatorname{tang}(\theta''-\theta')}{\operatorname{tang}t''-\operatorname{tang}t' + (1+\operatorname{tang}t''\operatorname{tang}t')\operatorname{tang}(\theta''-\theta')},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1+\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}\,\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'} - \left(\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}-\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}\right)\operatorname{tang}(\theta''-\theta')}{\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}-\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'} + \left(1+\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}\,\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}\right)\operatorname{tang}(\theta''-\theta')}.$$

Substituons maintenant, dans l'équation (1), à $\operatorname{tang}\alpha$ sa valeur (5) et à p sa valeur (2); nous aurons

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1+\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}\,\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'} - \left(\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}-\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}\right)\operatorname{tang}(\theta''-\theta')}{\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}-\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'} + \left(1+\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}\,\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}\right)\operatorname{tang}(\theta''-\theta')} \\ &\quad = f\left[\sqrt{r'^2+r''^2-2r'r''\cos(\theta''-\theta')}\right]. \end{aligned} \right.$$

Soit enfin

$$\text{(III)} \qquad r'' = \mathrm{F}(\theta'')$$

l'équation de la courbe donnée M″N″.

En éliminant r'' et θ'' entre les trois équations (I), (II) et (III), on aura l'équation différentielle de la courbe cherchée M′N′.

Supposons que la courbe M″N″ soit une droite. Alors on a

$$\theta'' = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{r''\,d\theta''}{dr''} = 0.$$

L'équation (I) donne

$$\sqrt{r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos(\theta'' - \theta')} = r'\cos\theta',$$

et l'équation (II) devient

$$\frac{\tang\theta' + \dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}}{1 - \tang\theta'\,\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}} = f(r'\cos\theta'), \tag{6}$$

qui est l'équation différentielle de la courbe cherchée M′N′.

Supposons que, en même temps, la courbe donnée MN soit une spirale logarithmique dont le pôle soit en a. Alors l'angle β est constant et l'équation (6) devient

$$\frac{\tang\theta' + \dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}}{1 - \tang\theta'\,\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}} = \tang\beta.$$

Soit γ' l'angle formé par la tangente en B′ à M′N′ avec la droite Aa. On voit que le premier membre de l'équation ci-dessus revient à $\tang\gamma'$, d'où résulte

$$\gamma' = \beta,$$

ce qui montre que, dans ce cas, la courbe M′N′ est une droite qui coupe Aa suivant l'angle β.

Si la courbe MN, au lieu d'être une spirale logarithmique était une circonférence de cercle ayant son centre en a, on trouverait de même, pour la courbe M′N′, une droite perpendiculaire à aA, résultat évident *a priori*.

SUR

LES VIBRATIONS TRANSVERSALES DES FILS

ET DES

LAMES D'UNE FAIBLE ÉPAISSEUR,

PAR M. E. GRIPON,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

On doit à M. Melde, professeur à l'Université de Marbourg, un procédé élégant qui permet d'engendrer des vibrations régulières et permanentes dans de simples fils de soie et de coton, ou dans des fils métalliques d'un petit diamètre.

On fixe l'extrémité d'un fil horizontal à l'une des branches d'un diapason vertical. A une certaine distance du diapason, se trouve une poulie sur laquelle passe le fil, et son extrémité libre supporte un petit plateau; on y place les poids qui doivent tendre le fil. On peut, si l'on veut, limiter la longueur de la partie vibrante du fil à l'aide d'un chevalet à recouvrement qui glisse le long d'une règle horizontale. On peut aussi faire tourner le diapason sur son pied, de telle sorte que le fil soit dans le plan de vibration des branches du diapason, ou bien qu'il soit perpendiculaire à ce plan, ou qu'il fasse avec lui un angle déterminé.

On fait vibrer le diapason avec un archet; on peut aussi fixer à la seconde branche du diapason un bout du tube capillaire en verre; on le frotte dans le sens de la longueur avec les doigts mouillés. La tige est dans le plan de vibration des branches, et les vibrations longitudinales qu'on excite dans le verre se communiquent au diapason et y engendrent des vibrations transversales fort régulières.

M. Melde a observé que, si le diapason vibre, le point d'attache du fil décrit une petite courbe fermée qui semble elliptique. On peut supposer, dès lors, que ce point est animé de deux mouvements rectilignes, l'un vertical, l'autre horizontal, situés tous les deux dans le plan des vibrations des branches. Si le fil est dans ce plan, il recevra du premier mouvement, qui est alors le plus intense, une série d'impulsions dans le sens de la longueur, et du second un mouvement transversal. L'expérience montre qu'il y a, dans le fil, coexistence de deux mouvements transversaux, rectangulaires, que le nombre des vibrations du second mouvement est double de celui qui convient au premier, et, si le fil présente quelques points brillants, on leur voit décrire des courbes en forme de *huit*, analogues à celles que M. Lissajous nous a fait connaître.

Ces courbes apparaissent nettement lorsque le fil fait un angle de 45 degrés avec le plan des vibrations du diapason.

Si le fil est dans ce plan, l'un des mouvements l'emporte de beaucoup sur l'autre, et la vibration du fil est *plane*, surtout si le fil est à l'octave grave du diapason.

Plaçons le fil dans une direction perpendiculaire au plan des vibrations; les deux mouvements élémentaires engendrent deux mouvements transversaux de même période que le mouvement du diapason, et les points brillants du fil semblent décrire des courbes elliptiques. Cependant, si l'on a disposé de la tension ou de la longueur du fil, de telle sorte qu'il soit à l'unisson du diapason, la vibration est plane.

Lorsque le fil parallèle au plan des vibrations est accordé à l'octave grave du diapason, il vibre en même temps que ce dernier et présente l'apparence d'un large fuseau sans nœuds intermédiaires. Si, en tournant le diapason, on rend le fil perpendiculaire au plan des vibrations, on le voit se partager en deux fuseaux égaux, séparés par un nœud, ce qui confirme ce que nous avons dit tout à l'heure sur le rapport des nombres de vibrations correspondant aux deux mouvements élémentaires du fil. En augmentant peu à peu la tension, on verrait le nœud quitter le milieu du fil, remonter vers le diapason et atteindre le point d'attache. A ce moment, les vibrations sont planes, et le fil qui vibre dans la totalité de sa longueur est à l'unisson du diapason.

En diminuant progressivement la tension, ou en laissant la tension

constante et en augmentant la longueur du fil, on voit apparaître successivement deux, trois, quatre,... fuseaux, séparés par des nœuds; chaque partie de la corde comprise entre les deux nœuds vibre à l'unisson du diapason, si le fil est perpendiculaire au plan des vibrations, ou à l'octave grave, s'il est dans ce plan.

Dans ce dernier cas, les fuseaux sont parfois peu apparents; mais on peut facilement apprécier la position des nœuds en plaçant sur le fil de petits cavaliers de papier. Le nombre des nœuds est toujours la moitié de ce qu'il serait si, toutes choses égales d'ailleurs, le fil était perpendiculaire au plan des vibrations.

Ce qui précède est un résumé de l'exposé des expériences de M. Melde fait par M. Pisko dans son Ouvrage : *Die neueren Apparate der Akustik;* Wien, 1860.

M. Duhamel [1] a trouvé le mouvement d'une corde tendue dont une extrémité est fixe, tandis que l'autre a un mouvement périodique donné. M. Bourget a depuis repris et complété l'analyse de M. Duhamel.

Le calcul montre que la corde est le siége de deux mouvements, dont l'un dépend de l'état initial, tandis que l'autre en est indépendant. Ce dernier est périodique, et la durée de sa période est la même que celle qui se rapporte à l'extrémité; l'autre est aussi périodique, et la durée de sa période est la même que si la corde vibrait seule avec ses extrémités fixes.

M. Duhamel a fixé des cordes tendues à l'angle d'une plaque métallique carrée qu'il faisait vibrer, et il relevait, par le procédé graphique qu'il avait imaginé, les vibrations de la corde et de la plaque.

Le mouvement de la corde écartée dans son état initial de sa position d'équilibre a paru résulter clairement de la superposition des deux mouvements indiqués par l'analyse; seulement, l'un de ces mouvements persiste seul, l'autre disparaît : c'est celui qu'on aurait obtenu d'après l'état initial, en supposant fixes les deux extrémités de la corde.

De ces expériences, l'auteur conclut que, en vertu des résistances dont on ne tient pas compte dans le calcul, mais qui n'en existent pas moins, le mouvement de la corde finit toujours par être de la même période

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VIII.

que celle de l'extrémité mobile, et que le mouvement indiqué par l'analyse et correspondant aux extrémités fixes reste insensible.

Si une corde de longueur l, de rayon r, de densité d, est tendue par un poids P, si le mouvement du diapason est donné par l'équation

$$y = k(\sin 2n\pi t + \varepsilon),$$

celui de la corde qui lui est synchrone sera

$$y = \frac{k}{\sin\frac{2n\pi l}{a}}(\sin 2n\pi t + \varepsilon)\sin\frac{2n\pi}{a}x.$$

On sait que $a^2 = \frac{gP}{\pi d r^2}$ ou $a = 2n'l$; en appelant n' le nombre des vibrations transversales que ferait la corde fixée à ses deux extrémités, elle rendait le son fondamental.

Les nœuds sont donnés par la relation $x = \frac{ca}{2n}$, quantité indépendante de l. La position des nœuds, comptés à partir de l'extrémité fixe de la corde, est donc indépendante de la longueur de celle-ci. (On ne peut donner à la constante c que les valeurs qui rendent x plus petit que l.)

Ainsi, en faisant varier cette longueur, on peut faire changer le nombre des nœuds; mais la distance de deux nœuds consécutifs reste constante; c'est ce que confirme l'expérience.

Si l'on représente par δ la distance de deux nœuds, par p le poids de la corde de longueur l,

$$\delta = \frac{a}{2n} \quad \text{ou} \quad \delta = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{Pgl}{p}}.$$

Cette relation est-elle constamment vérifiée par l'expérience?

Pour le savoir, j'ai installé, sur un support en bois vertical, un diapason horizontal. Le plan des vibrations est horizontal lui-même. Lorsque j'emploie des fils métalliques très-fins, je les soude à une petite lame métallique qui est ensuite serrée contre le diapason à l'aide d'une vis. Ce diapason est un de ceux qui servent à répéter les expériences de M. Lissajous.

Le fil est vertical et supporte directement les poids tenseurs. Un chevalet à recouvrement pince le fil en un certain point et limite la longueur de la partie vibrante; il est mobile le long d'une règle verticale divisée en millimètres. Lorsqu'on veut déterminer la position d'un nœud, on vise le fil à l'endroit du nœud à l'aide d'une lunette horizontale. On peut aussi déterminer la distance de deux nœuds, en mesurant le déplacement de la lunette sur la règle verticale qui la porte.

Assez souvent, lorsque l'amplitude des vibrations du fil est faible, les fuseaux sont peu apparents et, dans le voisinage des nœuds, le fil semble immobile sur une assez grande longueur; la position exacte du nœud est alors plus difficile à déterminer. On ne peut plus se servir directement de la lunette; on entoure la corde d'un fil de soie très-fin et on l'amène par tâtonnements au milieu de la portion du fil qui semble immobile.

En plaçant derrière la corde un écran de papier blanc qui porte un certain nombre de lignes horizontales équidistantes, on rend l'opération plus facile. Les fuseaux se projettent sur l'écran; on cherche, de part et d'autre du nœud, deux lignes sur lesquelles l'amplitude de la vibration soit la même et l'on admet que le nœud se trouve à égale distance de ces deux lignes.

Pour certaines longueurs de la corde, les fuseaux sont très-larges; les nœuds sont alors très-nets : la partie de la corde qui semble immobile se réduit à quelques millimètres.

Cela arrive lorsque la corde entière se trouve presque divisée par les nœuds en parties égales, ou, en d'autres termes, lorsque, en supposant la corde prolongée au-dessus du diapason, le nœud le plus voisin de celui-ci se forme près du point d'attache, au-dessus ou au-dessous. On se place dans ces circonstances, quand on le peut, pour obtenir des déterminations précises de δ, ou pour contrôler celles que l'on a prises déjà.

Si la corde est peu tendue et assez longue, il se forme un assez grand nombre de nœuds. On mesure alors la distance du chevalet au nœud le plus éloigné et l'on divise cette distance par le nombre des nœuds, ce qui conduit encore à une valeur précise de δ.

Les phénomènes généraux de la vibration ne changent pas, si l'on attache la corde à un support indépendant du diapason, et si l'on fait

agir ce dernier sur un point intermédiaire de la corde. On s'est assuré, par de nombreuses expériences, que les distances du nœud au chevalet restent ce qu'elles étaient dans le premier mode d'expérimentation et conduisent par conséquent aux mêmes valeurs de δ. On emploie cette disposition lorsque les cordes sont un peu grosses et supportent des poids un peu grands. On fixe au diapason une tige de cuivre présentant une fente verticale; la corde se trouve engagée dans cette fente; elle y est légèrement pressée et on l'y maintient avec un peu de cire. Le support de la corde porte un cadre en fer qui sert à soutenir le chevalet et à le placer dans une position convenable; ce cadre pend du reste librement et n'est fixé que par le haut.

Lorsqu'on emploie des fils fins, on s'aperçoit promptement que la position des nœuds n'est pas fixe pendant toute la durée du mouvement. Au début, lorsque l'amplitude des vibrations est grande, le nœud se forme en un point de la corde plus rapproché du diapason que celui qu'il occupe lorsque le mouvement s'est affaibli; et cela ne tient pas à ce que la courbe qui limite les fuseaux est plus prononcée au début qu'à la fin; car si l'on trace, avec une peinture blanche, un point de repère sur la corde et si ce point est au-dessous du nœud, au commencement du mouvement, on voit le nœud l'atteindre et le dépasser en s'abaissant. Dans certains cas, le nœud se déplace de 1 centimètre au moins; cela s'observe surtout sur le nœud le plus élevé, car le déplacement est moindre pour ceux qui sont plus éloignés du diapason, et même il est peu sensible, pour les nœuds voisins du chevalet, lorsque le nombre des nœuds est assez grand.

Il en résulte que, dans ces cas, la distance des nœuds se trouve, au début, plus grande que la distance théorique et qu'elle s'en rapproche, à mesure que le mouvement s'affaiblit, pour l'atteindre vraisemblablement lorsque les vibrations n'ont plus qu'une très-petite amplitude.

On a fixé directement au diapason un fil de laiton de $0^{mm},034$ de rayon. On a fait varier la valeur des poids tenseurs et l'on a cherché quelle longueur on devrait donner au fil pour qu'il prît la forme d'un fuseau, sans nœuds intermédiaires.

On admet qu'il est à l'unisson du diapason lorsque les vibrations sont planes. On avait déposé sur le fil quelques points blancs et l'on reculait peu à peu le chevalet tant qu'on le pouvait faire sans que la ligne droite

que semblent décrire ces points se changeât en une courbe elliptique; théoriquement le rapport $\frac{\sqrt{P}}{l}$ doit être constant.

Poids tenseurs.	Longueurs.	$\frac{\sqrt{P}}{l}$
25^{gr}	$342^{mm},9$	0,01458
20	302,6	0,01478
15	265,6	0,01458
10	214,0	0,01478
5	158,6	0,01419
2	152,0	0,01280

On trouve une vérification satisfaisante de la loi, lorsque la tension dépasse 5 grammes, et un désaccord au-dessous; la corde tend alors à vibrer en vertu de sa rigidité propre et comme le ferait une verge fixée à son extrémité inférieure. Si l'on se sert de ces nombres pour calculer d'après la formule le nombre de vibrations que fait le fil, on trouve pour

$$P = 25^{gr}, \quad \delta = 342^{mm},9, \quad n = 132,0,$$
$$P = 20^{gr}, \quad \delta = 302^{mm},6, \quad n = 133,6,$$

nombres très-rapprochés du véritable, car le diapason faisait 133,37 vibrations complètes; mais, pour $P = 2$, $\delta = 112$, on trouve $n = 116$, et l'erreur est ainsi de $\frac{1}{6}$.

Avec un fil de cuivre rouge dont le rayon est $0^{mm},1007$, on a, en cherchant encore les longueurs que donnent les vibrations planes,

P	δ	δ (calculé).
300^{gr}	$375^{mm},0$	$378^{mm},0$
200	302,0	308,0
100	217,0	218,0
50	149,9	154,0
20	110,0	98,7
5	76,0	48,8

Ce fil vibre donc en suivant les lois ordinaires tant que la tension dépasse 50^{gr}; car on a vérifié après coup que, si l'on donne au fil une longueur de 154^{mm} sous une charge de 50^{gr}, la vibration est plane si l'on

prend soin de lui donner peu d'amplitude. Lorsqu'on opère par tâtonnements et que l'on cherche ainsi la longueur qu'il faut donner à la corde pour que les vibrations cessent d'être planes, on tombe souvent sur des nombres variables; l'intensité du mouvement communiqué au diapason a une influence notable; il en est de même de la fixité du chevalet qui limite la corde. Ce n'est qu'en recommençant plusieurs fois de suite la même détermination que l'on arrive à obtenir des nombres concordants. Encore faut-il avoir soin d'attaquer le diapason avec l'archet de telle sorte que la pression de l'archet ne fasse pas fléchir la branche et ne change pas la tension du fil. On plaçait l'archet dans le plan horizontal des branches et l'on frottait l'extrémité de l'une d'elles. On a opéré ainsi dans toutes les expériences sur les cordes.

On a pris une corde de laiton telle que 1 mètre de cette corde pèse $1^{gr},202$; son rayon est donc de $0^{mm},2$.

Elle était suspendue à un support indépendant du diapason.

Celui-ci faisait 128,5 vibrations dans les trois premières expériences, et 126,7 dans les autres. On mesurait la distance δ de deux nœuds.

Tension.	δ (observé).	δ_1 (calculé).	$\frac{\delta_1}{\delta}$.
2994^{gr}	313,5	314,7	1,00
1994	493,0	494,0	1,00
586	268,5	269,0	1,00
500	258,0	251,9	0,97
400	231,5	225,6	0,97
300	202,0	195,4	0,97
200	167,0	159,6	0,95
100	139,0	112,8	0,80

La corde, dans la dernière expérience, est mal tendue, elle n'est plus rectiligne; aussi trouve-t-on, suivant les cas, des nombres différents. Ainsi, en lui donnant une grande longueur, j'ai trouvé 390 pour 3 δ, ce qui donne 130 pour δ, et 0,85 pour le rapport $\frac{\delta_1}{\delta}$; mais ces nombres conduisent toujours à la même conclusion. Les lois des cordes ne sont vérifiées que si les tensions n'atteignent pas une certaine limite inférieure, variable, du reste, avec la rigidité de la corde. Au-dessous de cette limite, qui, dans le fil de laiton, est voisine de 500 grammes, la

corde rend un son plus aigu que celui que lui assigne la théorie, et la différence va en croissant à mesure que la tension diminue.

Dans le cours de cette expérience, j'ai vu se produire des faits qui sont une confirmation de la théorie de M. Duhamel, mais qui infirment en même temps les conséquences qu'il a tirées de ses expériences.

Un fil de cuivre rouge de $0^{mm},1007$ de rayon, tendu par un poids de 20 grammes, vibre sous l'influence d'un diapason faisant 133 vibrations.

On lui donne successivement des longueurs de 150, 170, 190, 200 millimètres. Il se forme, dans chaque cas, un nœud situé à 115 millimètres du chevalet; ce nombre est un peu plus grand que le nombre $98^{mm},5$ que l'on trouve en calculant, d'après les circonstances de l'expérience, la longueur de la corde qui vibrerait à l'unisson du diapason.

Le nœud se forme si l'on ébranle faiblement le diapason. Si l'on excite dans celui-ci des vibrations plus fortes, tout nœud disparaît et la corde vibre en son entier; cet état persiste tant que dure le mouvement du diapason.

Avec la longueur 280 millimètres, il se forme deux nœuds intermédiaires. La distance de deux nœuds consécutifs est 105 millimètres; il faut encore produire dans le diapason des vibrations de faible amplitude. Avec des vibrations plus fortes, la corde ne présente plus qu'un nœud placé à 141 millimètres du chevalet, c'est-à-dire au milieu de la corde, et l'on a deux fuseaux égaux compris entre ce nœud et les deux extrémités de la corde, qui sont alors l'un et l'autre des nœuds. Si le diapason est ébranlé plus fortement encore, tout nœud disparaît, et la corde vibre en son entier ne formant qu'un seul fuseau.

Donnons au fil une longueur de 450 millimètres : on obtient, lorsque les vibrations sont faibles, quatre nœuds distants de 99 millimètres, longueur théorique; il n'y en a plus que trois, distants de 144 millimètres et partageant la corde en quatre parties égales, si le diapason vibre plus fortement; on en observe deux, distants de 150 millimètres et placés au tiers de la corde, si l'attaque de l'archet est plus énergique, et l'on pressent que des vibrations encore plus fortes réduiraient le nombre des nœuds à deux où les feraient disparaître.

Chaque mode de division persiste pendant toute la durée du mouve-

ment du diapason ; la vibration est très-régulière et son amplitude est, au début, relativement grande.

Nous avons là évidemment la reproduction des vibrations signalées par M. Duhamel, comme dépendant de l'état initial de la corde. Seulement, dans ses expériences, ces vibrations finissaient toujours par s'éteindre, et la corde arrivait toujours à avoir un seul mouvement de même période que celle de l'extrémité. Dans les expériences qui précèdent, on est parvenu à isoler ces divers mouvements qu'annonce la théorie. Il faut que l'amplitude des vibrations soit faible pour que la corde vibre à l'unisson, sinon elle vibre comme si ses deux extrémités étaient fixes, et ses vibrations sont beaucoup plus lentes que celles de l'instrument.

M. Duhamel doutait de la possibilité d'un pareil résultat ; ses expériences ne le lui avaient pas présenté, et il partait de là pour combattre l'explication que Savart avait donnée d'une de ses expériences dans laquelle les vibrations rapides d'une verge en engendraient de lentes dans une seconde liée à la première.

Nous sommes bien loin de penser que les expériences de M. Duhamel ne furent pas bien faites. On peut être assuré que, là comme ailleurs, il a mis cette précision qu'il aimait tant et qui donne un cachet particulier à tous ses travaux.

Nous avons vu souvent, comme lui, les deux sortes de mouvements se produire simultanément, et l'un d'eux, celui qui convient aux extrémités fixes, disparaître, tandis que l'autre persistait. Cela arrive d'ordinaire lorsque la tension de la corde est un peu forte ; alors il n'y a qu'un seul mouvement possible, celui qui est à l'unisson du diapason ; et cependant, même dans ce cas, une attaque vigoureuse du diapason peut faire naître le second mouvement, le mouvement propre de la corde qui alors coexiste avec le premier, le mouvement synchrone au diapason.

Le doute émis par M. Duhamel nous faisait un devoir de multiplier les expériences, afin de bien nous convaincre que la corde rend, dans le second mouvement, un son plus grave que le diapason. Les fils métalliques très-fins qui nous ont servi tout d'abord ne nous permettaient pas d'entendre le son qu'ils peuvent rendre ; on a répété ces expériences sur des fils plus gros.

Avec un fil de fer dont le rayon est de $0^{mm},01$ environ, la tension de 100 grammes et la longueur de 445 millimètres, le diapason cité plus haut partage la corde en deux fuseaux. La corde rend le son du diapason, puis des harmoniques, parmi lesquels on distingue l'octave et la quinte, qui s'affaiblissent et s'éteignent, puis reparaissent vers la fin du mouvement et deviennent plus forts quelques secondes avant que le mouvement cesse.

Si l'on donne au diapason un ébranlement énergique, la corde vibre en son entier, le nœud intermédiaire disparaît, et l'on entend un son grave et fort qui est à peu près à l'octave grave du diapason.

Avec la longueur 350 millimètres et une tension de 275 grammes, on a encore ce son grave, intense, sortant facilement. L'attaque de l'archet la plus légère fait vibrer la corde en son entier; mais, dans le large fuseau qui se forme alors, on aperçoit deux fuseaux plus petits sensiblement égaux; ils le sont si la longueur est 380 millimètres, et le nœud qui les sépare doit être à 190 millimètres : on ne le voit pas. Les deux fuseaux se terminent en pointes très-déliées qui cessent à 20 millimètres environ de part et d'autre du milieu de la corde, en sorte qu'on ne voit là qu'un seul mouvement apparent.

Les deux fuseaux intérieurs disparaissent vers la fin du mouvement, et au même instant le grand fuseau reçoit un accroissement d'amplitude; puis tout disparaît.

Des vibrations très-faibles déterminent dans la corde la production de deux nœuds.

Avec une corde d'aluminium et une corde de laiton, on observe des phénomènes analogues.

Avec la première, dont le rayon était de $0^{mm},27$ et la charge 100 grammes, on constate d'abord que la corde fait des vibrations planes lorsqu'on lui donne la longueur 175 millimètres, que l'on trouve par le calcul lorsque la corde doit faire 133,3 vibrations. Avec la longueur 210 millimètres et des vibrations faibles, on a un nœud placé à 175 millimètres environ du chevalet. Si l'attaque est un peu forte, on a un seul fuseau s'étendant d'une extrémité à l'autre de la corde; la corde vibre largement et le nœud commence à se former; puis, quelques secondes après, le second mouvement succède au premier, et l'on dirait que c'est avec un effort bien marqué que la corde s'ouvre en un seul fuseau.

Du reste, la même chose s'observe toutes les fois que le second mouvement succède au premier; son amplitude est bien plus grande dans la plupart des cas, et le fil doit être soumis à un effort assez considérable. Je citerai le fait suivant. On fixe les extrémités de la corde à deux chevilles: on peut la tendre à l'aide d'une vis; on fait alors agir le diapason sur un point intermédiaire de la corde. Or, lorsqu'on étudie le premier mouvement et que par mégarde on produit le second avec sa grande amplitude, on trouve, après cela, que la tension de la corde a diminué. La vis que j'employais était grossièrement faite, et elle cédait, paraît-il, à la tension que la corde semble éprouver pendant le second mouvement.

Revenons à notre corde d'aluminium; si l'on porte sa longueur à 260 millimètres, on retrouve ce que donnait la longueur précédente, avec cette particularité que les deux mouvements cherchent à s'établir en même temps. Il se forme un nœud à 175 millimètres du chevalet dans le premier mouvement, un nœud à 130 millimètres dans le second. On les voit apparaître successivement; le son du diapason tremblote, la vibration générale de la corde est troublée.

A la longueur de 300 millimètres, la corde vibre dans son entier avec une plus grande amplitude, et l'on commence à entendre un son grave, intense, à l'octave grave du diapason ou à peu près. Il est d'abord de courte durée; puis, en augmentant peu à peu la longueur de la corde, on l'entend d'une manière permanente; il donne des battements avec le son du diapason et l'amplitude des vibrations de la corde éprouve des variations périodiques qui correspondent à ces battements.

Lorsque la longueur est de 340 à 350 millimètres, le son grave éclate avec force, la corde vibre en son entier avec une facilité extrême, et il est impossible d'obtenir seule la division de la corde en deux fuseaux qui correspond au premier mouvement.

Le son grave, qui accompagne la vibration de la corde en un seul fuseau, persiste lorsque l'on a dépassé la longueur de 350 millimètres; puis il cesse, parce qu'on ne peut plus faire naître ce mouvement en un seul fuseau. Le premier mouvement se produit alors avec facilité; la corde tend à se diviser en trois fuseaux, et un ébranlement un peu fort du diapason ramène au second mouvement, c'est-à-dire fait vibrer la corde en deux fuseaux égaux. Là encore, on observe un passage

facile de l'un des mouvements à l'autre, lorsque certains des nœuds du premier sont voisins de ceux du second.

Dans les nombreuses expériences que j'ai faites avec une corde en laiton de $0^{mm},2$ de rayon, j'ai vu se confirmer tous les faits relatés plus haut. Avec cette corde, le son principal sortait plus pur et débarrassé des harmoniques nombreux et intenses que donne la corde d'aluminium ; j'ai pu constater que, toutes les fois que la corde vibre en son entier, elle rend le son qui lui est propre et qui est plus grave que celui du diapason. Ce son ne sort bien et la vibration ne s'établit bien que si le son propre de la corde ne s'éloigne pas trop du son du diapason ou de son octave grave. Plus on se rapproche de ces sons, plus est facile la vibration de la corde en son entier.

Ainsi, dans certaines circonstances déterminées, avec des cordes qui sont faiblement tendues, on peut obtenir successivement les deux mouvements signalés par M. Duhamel, et l'on peut isoler du premier le second mouvement, celui qui dépend de l'état initial. On le voit tantôt succéder au premier, tantôt se produire immédiatement, et il persiste pendant toute la durée du mouvement du diapason. La corde vibre alors d'une manière parfaitement régulière et l'amplitude des vibrations, qui est d'abord relativement grande, s'affaiblit progressivement sans qu'on aperçoive aucune altération dans le mouvement. On a donc là une confirmation de la théorie, plus complète que ne le pensait M. Duhamel lui-même.

Revenons à la formule théorique

$$y = \frac{k}{\sin 2n\pi \frac{l}{a}} (\sin 2\pi t + \varepsilon) \sin \frac{2n\pi}{a} x.$$

Remplaçons a par $2ln'$, n' étant le nombre des vibrations répondant au son propre de la corde, la formule qui donne la place des nœuds devient

$$x = C \frac{n}{n'} l$$

et l'on voit que, pour qu'un nœud se forme au point d'attache de la corde et du diapason, pour que l'on ait $x = l$, il faut que $\frac{n}{n'}$ soit un nombre

entier, et suivant que $\frac{n}{n'}$ aura pour valeur 1, 2, 3,..., la corde formera en vibrant 1, 2, 3,... fuseaux égaux. Cela semble en tout conforme à l'expérience; mais, si l'on se reporte à la valeur de y, on voit, et c'est une remarque que je dois à M. Bourget, que le dénominateur $\sin 2\pi \frac{nl}{a}$ ou $\sin 2\pi \frac{n}{n'}$ est nul lorsque $\frac{n}{n'}$ est entier. Alors y prend la forme ∞, excepté aux points nodaux, pour lesquels y est de la forme $h \sin 2n\pi t$.

Il y a là un cas singulier de l'analyse dont il est bon de rechercher la signification expérimentale.

On s'est servi d'une corde en laiton de $0^{mm},2$ de rayon, et d'un diapason faisant 128,5 vibrations complètes.

La corde est fixée à un support indépendant du diapason. On la soumet à des tensions croissantes et voici à quel résultat général on parvient.

Si l'on accorde avec tout le soin possible la corde sur le diapason et si l'on fait vibrer ce dernier, on entend un son commun au diapason et à la corde qui forme alors un seul fuseau; mais ce n'est pas celui du diapason, il est plus grave. Si l'on dérange le chevalet de manière à rompre l'accord du diapason et du fil, le son monte et redevient ce qu'il doit être. On retrouve un pareil abaissement si la moitié de la corde, ou le tiers, se trouve à l'unisson du diapason, quoique l'effet soit de moins en moins marqué à mesure que le nombre des nœuds augmente. La variation de ton que l'on vient de signaler est d'autant plus grande que la tension est plus forte; elle devient insensible sous de faibles tensions. Il est plus difficile alors de déterminer avec précision le son propre de la corde; mais on trouve qu'il y a certaines longueurs de corde pour lesquelles celle-ci vibre mal, et elles correspondent à peu près aux longueurs qui se rapportent au cas singulier.

Voici le détail des expériences :

On suspend au fil un poids de 100 grammes. On trouve par une observation directe

$$4\delta = 557^{mm} \quad \text{ou} \quad \delta = 139^{mm}.$$

La corde, du reste, est fort mal tendue par ce poids de 100 grammes.

En donnant à la corde des longueurs comprises entre 140 et 150 mil-

limètres, on a de la peine à la faire vibrer : un coup d'archet léger, qui d'ordinaire engendre dans le diapason et dans la corde des vibrations de longue durée, ne produit rien dans ce cas. Si l'on augmente sa force, on voit la corde vibrer en un seul fuseau très-large; mais la vibration ne dure qu'une fraction de seconde, et elle s'éteint brusquement. Avec la longueur 390 millimètres, on devrait avoir trois fuseaux égaux; on voit la corde vibrer en son entier et ne présenter que des traces d'une division en trois parties égales.

Avec la longueur 560 millimètres, la corde vibre en son entier; elle présente en même temps deux fuseaux égaux, c'est-à-dire un nœud au milieu et, en outre, quatre fuseaux plus petits et égaux. C'est évidemment le second mouvement de Duhamel que l'on observe alors; du reste, la vibration ne se fait pas avec régularité.

On porte la tension à 200 grammes. En donnant au fil une grande longueur, on trouve directement $\delta = 166^{mm}$. La corde refuse de vibrer lorsque sa longueur est 170 millimètres; si elle est de 340 millimètres, la corde se divise en deux, mais vibre en même temps en son entier. Si elle est de 660 millimètres, la corde se divise en quatre fuseaux tant que l'archet frotte faiblement sur le diapason; mais, si l'on enlève l'archet, on n'observe plus que deux fuseaux égaux, et l'on entend un son qui est à l'octave grave du diapason. On a encore là le second mouvement de la corde. Il devient, dans ce cas singulier, le mouvement normal du fil.

La tension est portée à 300 grammes : une mesure directe donne $\delta = 205^{mm}$. La vibration est difficile et courte lorsque la corde a une longueur de 200 à 204 millimètres. Elle vibre en son entier sans apparence de nœud médian, lorsque sa longueur est de 406 millimètres.

Avec la tension 400 grammes, la corde vibre difficilement sous la longueur de 230 millimètres; elle est alors à l'unisson du diapason. Si on l'allonge de quelques millimètres, la vibration se produit facilement; à 460 millimètres, elle vibre dans sa totalité.

Avec une charge de 500 grammes, la distance des nœuds δ est 254 millimètres; si l'on donne cette longueur à la corde, la vibration est de courte durée, le son du diapason éprouve un petit abaissement. On l'observe aussi si la longueur est de 510 millimètres : il se forme

alors un nœud médian; d'autres fois, la corde vibre en son entier en faisant entendre l'octave grave du diapason.

A la longueur 740 millimètres, la corde vibre à l'unisson du diapason, les nœuds ne sont pas également espacés.

A 750 millimètres, la corde produit des battements lents avec le diapason; ainsi elle rend le son qui lui est propre, en même temps qu'elle vibre à l'unisson de l'instrument.

A 765 millimètres, on a trois nœuds qui ne sont pas encore également espacés; le son du diapason semble un peu abaissé.

Toutes ces expériences, faites avec de faibles tensions, sont loin de donner un résultat aussi net que les suivantes, qui se rapportent à des tensions plus fortes.

Si l'on charge la corde de 1000 grammes, et si l'on prend avec un monocorde l'unisson du diapason lorsque le nœud est au point d'attache, et lorsqu'il est au-dessus et au-dessous, on trouve le son plus aigu dans le dernier cas.

La corde du monocorde accordée sur le son ordinaire du diapason donne avec lui des battements évidents lorsqu'on se place dans le premier cas; le son du diapason s'est donc bien abaissé, et l'on trouve un rapport de 0,996 entre le son grave de l'instrument et le son normal.

On a chargé la corde de 1994 grammes et on lui a donné la longueur de 492 millimètres; elle est alors à l'unisson du diapason, le son que celui-ci rend est 0,976, en représentant par 1 le son normal; enfin, avec la tension de 2994 grammes, le son grave est de 0,964.

L'abaissement du ton croît, comme on le voit, avec la charge.

Avec un diapason qui faisait 189 vibrations, on observe également un abaissement de ton, lorsque le nœud est au point d'attache. La corde ayant une tension de 2994 grammes, la longueur de la corde du monocorde mise à l'unisson de l'instrument est 661 millimètres si le nœud est éloigné du diapason; 669 millimètres si la corde a une longueur de 403 millimètres, longueur théorique qu'elle doit avoir pour être à l'unisson de l'instrument; 673 millimètres si la longueur de la corde est de 409 millimètres, longueur trouvée par expérience pour la distance de deux nuœds; le rapport des sons est 0,994.

Avec une tension de 1994 grammes, la longueur du monocorde est

670 millimètres, lorsque la corde de laiton a une longueur 329 millimètres qui assure l'unisson avec le diapason, cet unisson étant pris directement; car la longueur théorique serait 340 millimètres, et l'expérience montre qu'avec cette longueur le nœud est au-dessous du point d'attache.

La corde ne supportant plus qu'un poids de 1000 grammes est à l'unisson sous la longueur 235 millimètres; la longueur théorique serait 239 millimètres. La longueur du monocorde est alors 670 millimètres au lieu de 661; elle est de 654 pour la longueur 244 et redevient 661 pour la longueur 290.

Si l'on donne à la corde une longueur 470 millimètres, il se forme un nœud au milieu, la longueur du monocorde redevient 670, pour reprendre sa valeur normale 661, lorsque la longueur du fil est 480. Ainsi, lorsque le nœud est au point d'attache, qu'il y ait sur la corde un fuseau ou deux, le son n'est plus que 0,986 du son normal.

Enfin on a pris un diapason plus aigu qui faisait 246 vibrations; la corde supportait un poids de 1000 grammes. Avec la longueur 180, elle est à l'unisson du diapason, et la longueur du monocorde est 522, tandis que 517 convient au son que rend le diapason lorsque le nœud est éloigné du point d'attache.

Avec la longueur 360, on retrouve le nœud au point d'attache et la longueur du monocorde est encore 522. Ce même nombre se retrouve lorsque la longueur de la corde est 540 et que la corde tend à se partager en trois fuseaux égaux.

Le rapport des deux sons dans ce cas est 0,99.

Avec la charge 2994, on trouve, pour rapport des deux sons, 0,98. Il y a abaissement du son lorsque le nœud est au point d'attache, soit que la corde de longueur 300 millimètres vibre en un seul fuseau, soit qu'il y ait deux fuseaux, la longueur de la corde étant de 600 millimètres.

Je dois dire qu'avec les deux derniers diapasons, lorsque la corde vibre en un seul fuseau et que l'on augmente peu à peu la longueur, pour passer du son grave au son normal, on entend, pour une certaine longueur très-voisine de celle que donne le son grave, un son un peu plus aigu que le son normal; il serait environ 1,01.

Du reste, pour les fortes tensions, comme pour les faibles, la vibra-

tion de la corde, dans ces cas extrêmes, n'a jamais toute la régularité que l'on observe lorsque le nœud est à 1 centimètre au moins du diapason.

On voit donc que l'expérience justifie les indications de la théorie; lorsque le nœud est très-voisin de l'extrémité supérieure de la corde, quel que soit, du reste, le nombre des fuseaux, l'amplitude des vibrations est très-grande, souvent énorme. C'est ce qu'indique le calcul; $\frac{n}{n'}$ est voisin d'une valeur entière, et le dénominateur de y se trouve très-petit, ce qui assigne à y de grandes valeurs.

Lorsque $\frac{n}{n'}$ a une valeur entière, la vibration de la corde, celle du diapason se trouvent troublées; le son sort mal, il ne dure qu'un instant; ou bien il se trouve changé, il devient plus grave que ne le seraient les sons de la corde et du diapason pris isolément.

Les deux corps échappent ainsi, en quelque sorte, à la condition que le calcul impose à la corde, d'avoir dans ces cas une amplitude infinie.

Fils et lames minces vibrant à la manière des verges.

Le procédé qui a si bien réussi à M. Melde, pour faire vibrer des fils faiblement tendus, peut être appliqué aux fils métalliques ou aux lames minces qui, prises sous une faible longueur, vibrent à la manière des verges.

Un ressort de montre que l'on fixe à la branche d'un diapason vibre fort régulièrement, s'il a une longueur convenable. Il présente des ventres et des nœuds, le plus souvent, fort apparents, et comme la petite verge, nous le verrons plus loin, est soumise dans son mouvement à des lois analogues à celles qui régissent les verges vibrant transversalement, on a un moyen élégant de vérifier les principaux résultats que M. Lissajous a indiqués dans son Mémoire sur les vibrations des verges (¹).

On peut projeter sur un tableau l'image agrandie de la petite lame

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XXX.

éclairée par une lumière convenable pour faire voir à tout un auditoire la forme que prend une verge qui vibre. On peut marquer sur ce tableau la position des nœuds et vérifier tout ce qui se rapporte à leurs distances respectives.

On peut donner au ressort la forme d'un anneau et montrer la disposition des nœuds et la forme que prend l'anneau pendant la vibration.

Il est possible de montrer ainsi que tous les corps solides, même les plus flexibles, ont assez d'élasticité pour vibrer à la manière des verges; car les expériences réussissent, non-seulement avec des métaux, mais avec des pailles, du papier et même des fils de soie.

Enfin on peut déduire de ces expériences une mesure assez précise de la vitesse de propagation du mouvement vibratoire dans les solides et, par suite, de leur coefficient d'élasticité.

Cherchons l'équation du mouvement de la verge en la supposant libre à une de ses extrémités et fixée par l'autre à la branche d'un diapason. Nous supposons le mouvement de ce dernier simple et représenté par l'équation

$$y = \mathrm{M} \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \quad \text{ou} \quad y = \mathrm{M} \sin 2n\pi t,$$

en appelant n le nombre des vibrations par unité de temps. Nous prenons l'extrémité libre pour origine des coordonnées.

L'équation différentielle du mouvement d'une verge est

$$\frac{d^2y}{dt^2} = b\frac{d^4y}{dx^4};$$

pour $x = 0, y = 0$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0;$$

pour $x = l$,

$$y = \mathrm{M} \sin 2n\pi t.$$

De plus, la verge étant fixée au diapason, on peut admettre que, pendant les excursions de ce dernier, la petite portion du ressort voisine du diapason se meut parallèlement à elle-même et à la ligne de repos, c'est-à-dire que la tangente à la courbe qui donne la forme de la verge pendant le mouvement est constamment parallèle à l'axe des x.

On a donc, pour $x = l$,

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

quel que soit le temps. Enfin, au commencement du mouvement, le ressort est rectiligne et l'on a, pour $t = 0$, $y = 0$, quel que soit x.

Poisson ([1]) donne, pour l'intégrale de l'équation différentielle,

$$y = \Sigma(p \sin m^2 bt + q \cos m^2 bt),$$

qui se réduit à

$$y = p \sin m^2 bt + q \cos m^2 bt;$$

si la verge a un mouvement simple, ne rend qu'un seul son,

$$p = A \sin mx + A' \cos mx + \tfrac{1}{2} B(e^{mx} - e^{-mx}) + \tfrac{1}{2} B'(e^{mx} + e^{-mx}).$$

Les majuscules représentent des constantes arbitraires.

Pour $t = 0$, y étant nul, quel que soit x, $q = 0$, et l'équation se réduit à

$$y = p \sin m^2 bt.$$

Pour $x = l$,

$$y = M \sin 2\pi nt;$$

donc

$$m^2 b = 2\pi n \quad \text{et} \quad p = M;$$

de plus

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{ax} = 0.$$

On a donc, pour déterminer A et A', les équations

$$A(2 \sin ml + e^{ml} - e^{-ml}) + A'(2 \cos ml + e^{ml} + e^{-ml}) = 2M,$$
$$A(2 \cos ml + e^{ml} + e^{-ml}) + A'(e^{ml} - e^{-ml} - 2 \sin ml) = 0,$$

d'où

$$A = \frac{M}{2[2 + \cos ml(e^{ml} - e^{-ml})]}(2 \sin ml - e^{ml} + e^{-ml}),$$
$$A' = \frac{M}{2[2 + \cos ml(e^{ml} - e^{-ml})]}(2 \cos ml + e^{ml} + e^{-ml}).$$

([1]) POISSON, *Mécanique*, t. II.

Ajoutons encore que, si nous appelons a la vitesse du son dans la verge, e l'épaisseur, on a

$$b = \frac{ae}{2\sqrt{3}},$$

en supposant la verge prismatique et de section rectangulaire; si elle est cylindrique et de rayon r,

$$b = \frac{ar}{2}.$$

Les nœuds seront donnés par y ou $p = 0$, c'est-à-dire par l'équation

$$(2\sin mx + e^{mx} - e^{-mx})(2\sin ml - e^{ml} + e^{-ml}) \\ + (2\cos mx + e^{mx} + e^{-mx})(2\cos ml + e^{ml} + e^{-ml}) = 0.$$

Dans nos expériences, ml est toujours un nombre assez grand pour que l'on puisse négliger e^{-ml}, $\sin ml$ et $\cos ml$ devant e^{ml}.

On aura donc des valeurs de x suffisamment approchées en écrivant

$$\cos mx - \sin mx = e^{-mx} \quad \text{ou} \quad \sin(mx - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-mx}.$$

C'est la formule que donne M. Lissajous pour trouver la position du premier nœud dans une verge vibrant transversalement.

En résolvant cette équation par la méthode des approximations successives, M. Lissajous trouva

$$mx - 45^\circ = 14^\circ, 28';$$

donc

$$mx = 0,3304\pi.$$

En cherchant une seconde valeur de mx, on la trouve très-voisine de $\frac{5}{4}\pi$.

Si l'on construit la courbe,

$$z = \sin(mx - 45^\circ) \quad \text{et} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-mx},$$

on voit que les autres valeurs de mx sont

$$\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \ldots,$$

c'est-à-dire que l'on retrouve les résultats donnés par M. Lissajous sur la position des nœuds dans les verges libres à une de leurs extrémités.

Ainsi, en appelant D la distance normale de deux nœuds consécutifs, on a

$$D = \frac{\pi}{m}.$$

La distance du premier nœud à l'extrémité libre est $x_1 = 0,33\,D$, et la distance du second nœud au premier est

$$x_2 - x_1 - (1,25 - 0,33)\frac{\pi}{m} \quad \text{ou} \quad 0,92\,D.$$

De plus, si l'on prend d'une part une lame fixée au diapason, de l'autre une lame de même épaisseur, fixée à l'une de ses extrémités et mise en vibration à la manière ordinaire, si les deux verges rendent le même son, on trouvera, en partant de l'extrémité libre, les nœuds espacés de la même manière sur l'une et l'autre lame ; la seule différence, c'est que, dans la seconde lame, l'extrémité fixe est nécessairement un nœud, tandis que le point d'attache de la lame au diapason n'est un nœud que dans des cas très-particuliers, et lorsque la longueur est telle que

$$\cos ml\,(e^{ml} + e^{-ml}) = -2.$$

L'expérience réalise mal ce dernier cas, et, lorsque le nœud est au point d'attache, les vibrations de la lame deviennent irrégulières, la verge vibre dans toute sa longueur; en même temps elle se divise en un certain nombre de nœuds, et l'on retrouve quelque chose d'analogue au cas singulier que nous avons signalé pour les cordes.

Du reste, notre analyse est incomplète et ne se rapporte qu'à un cas particulier, celui où, dans l'état initial, la verge est rectiligne. Si l'état initial est quelconque, il faudra chercher l'intégrale générale de l'équation différentielle, et, si l'on se laissait guider par l'analogie et par les indications de l'expérience, on devrait trouver que le mouvement de la verge se compose de deux mouvements périodiques, l'un indépendant de l'état initial et de même période que celui du diapason : c'est celui que nous avons étudié ; l'autre dépendant de l'état initial et le même

que celui que prendrait la verge si l'on considérait comme fixe le point où elle s'attache au diapason.

L'expérience nous apprend que ces deux mouvements sont réalisables; de faibles vibrations excitées dans le diapason donnent naissance dans la verge à un mouvement de même période. Des vibrations plus fortes font vibrer la lame en son entier sans qu'il se forme de nœuds intermédiaires. Parfois ces deux mouvements coexistent, comme le veut la théorie, et ce cas se réalise surtout si la verge est assez courte pour qu'il ne se forme qu'un nœud pendant le mouvement synchrone au diapason.

Quelquefois, lorsqu'il se forme un assez grand nombre de nœuds, une attaque un peu forte du diapason détermine la production d'un nombre moindre de nœuds distribués comme dans une verge dont l'une des extrémités serait fixe.

Le point d'attache est alors la place d'un nœud.

Dans certains cas particuliers que le hasard a amenés sans que j'aie pu les reproduire à volonté, j'ai vu ce second mouvement persister seul pendant toute la durée de celui du diapason et sans le moindre trouble.

Ainsi un fil d'aluminium de $0^{mm},065$ de rayon, vibrant sous l'influence du diapason de 133 vibrations, présentait huit nœuds lorsque son mouvement était synchrone avec celui du diapason et, par une attaque plus forte, ne présentait plus que cinq ou six nœuds, si l'on compte comme nœud le point d'attache de la verge au diapason. La verge devait alors vibrer plus lentement que le diapason. J'ai observé les mêmes faits avec des ressorts de montre et des fils de nature diverse. Du reste, fort souvent les deux mouvements coexistent et se troublent mutuellement; c'est ce qui arrive surtout lorsque dans le mouvement synchrone le nœud supérieur est voisin du point d'attache, qu'ainsi les nœuds, dans les deux mouvements, sont voisins l'un de l'autre. Alors la vibration de la verge devient irrégulière, si l'on n'a pas la précaution d'attaquer faiblement le diapason avec l'archet, et encore ne réussit-on pas toujours à faire vibrer la verge.

Les formules précédentes nous apprennent que, si l'on part de l'extrémité libre, les positions des nœuds sont indépendantes de la longueur de la lame.

Fixons au diapason un ressort de montre; s'il est court, il vibre dans toute sa longueur, et il n'y a pas de nœuds.

En l'allongeant peu à peu, on voit se produire un nœud, puis deux, puis trois, et les vibrations ne deviennent irrégulières que lorsque le dernier nœud est voisin du diapason.

On constate que les distances des nœuds à l'extrémité libre sont constantes et indépendantes de la longueur. Ainsi, au diapason de 133,37 vibrations doubles, on a fixé un ressort d'épaisseur $0^{mm},127$.

Longueur de la lame.	x^1	x_2-x_1	x_3-x_2	x_4-x_3	x_5-x_4	$l-x_n$
mm 28,48	16,24	»	»	»	»	12,24
31,52	15,14	»	»	»	»	16,31
82,00	15,72	»	»	»	»	27,00
100,00	15,60	39,80	»	»	»	44,60
121,24	15,20	40,60	43,60	»	»	21,84
144,64	14,84	42,08	43,62	»	»	45,00
156,20	14,36	41,60	44,44	45,72	»	10,08
177,24	15,00	40,60	44,96	43,71	»	32,92
199,16	14,14	41,60	44,08	44,60	44 à 46	8,62

Nous devons remarquer que, pour les verges comme pour les cordes, les nœuds se déplacent pendant le mouvement, surtout le nœud le plus voisin du diapason. Il se trouve au début du mouvement, lorsque les vibrations sont grandes, plus éloigné du diapason qu'il ne le sera à la fin. Si l'on marque d'un trait blanc un point de la verge voisin du nœud, on s'assure que celui-ci est au-dessous du point blanc tout d'abord, et qu'il se trouve au-dessus à la fin. Nous avons trouvé un pareil déplacement du nœud dans les cordes tendues; mais il se faisait en sens inverse, le nœud s'éloignant du diapason au lieu de s'en rapprocher. Lorsque le nœud d'une verge se forme d'abord à 7 ou 8 millimètres du point d'attache, on le voit remonter peu à peu jusqu'à ce qu'il atteigne ce point, et alors le mouvement du diapason et de la verge s'arrête brusquement. Cela prouve une fois de plus que, pour les verges comme pour les cordes, la position du nœud au point d'attache constitue un cas particulier, dans lequel le mouvement de la verge synchrone avec celui du diapason est impossible.

Les expériences précédentes se résument ainsi :

La distance D de deux nœuds intermédiaires est $44^{mm},6$.

La distance du premier nœud à l'extrémité libre est $x_1 = 14^{mm},93$ ou à peu près 0,33 D.

La distance du premier nœud au suivant est $40^{mm},5$ ou 0,90 D.

La distance du dernier nœud au diapason varie de 0 à $44^{mm},6$.

Ce sont bien là les résultats que nous donnait le calcul.

Les nombres précédents sont les moyennes d'un grand nombre d'expériences.

Je citerai encore les mesures suivantes, obtenues à l'aide du même diapason et avec un ressort d'acier dont l'épaisseur était de $0^{mm},12$; on a pris la position des nœuds vers la fin du mouvement, lorsqu'elle est devenue à peu près fixe :

Longueur.	x_1	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$
mm				
119,32	14,98	»	»	»
144,34	14,76	40,40	44,40	»
187,04	14,98	40,92	44,36	44,00

La distance moyenne des nœuds est

$$D = 44^{mm},25;$$

théoriquement elle doit être

$$D^2 = \frac{\pi^2}{m^2} = \frac{\pi a e}{8n}.$$

En prenant pour vitesse de son dans l'air $a = 14,7 \times 332^{mm},2$, on trouve $x = 44^{mm},8$. Ainsi la formule se trouve pleinement vérifiée; de même $x_1 = 14,74$, qui est 0,33 de 44,20, et la distance des deux premiers nœuds $x_2 - x_1 = 40,7$, ou les 0,92 de 44,20.

Si, dans deux expériences faites avec la même verge, on change de diapason, *les carrés des distances de deux nœuds consécutifs sont inversement proportionnels au nombre de vibrations.*

Avec le même diapason et des verges différentes, *les carrés des distances de deux nœuds sont proportionnels aux épaisseurs.*

On a pris un fil de cuivre et, en le faisant passer à la filière, on a obtenu des échantillons de fils du même cuivre ayant des diamètres

différents. On les a fait vibrer à l'aide de deux diapasons faisant, l'un 133,37, l'autre 268,7 vibrations. Voici les résultats obtenus :

Rayon.	n	D	$\frac{D^2}{r}$	n'	D'	$\frac{D'^2}{r}$	$\frac{D'}{D}$
mm 0,526	268,9	mm 76,76	0,00870	133,37	109,90	0,00435	1,42
0,440	»	68,71	0,00932	»	96,60	0,00470	1,40
0,330	»	58,96	0,00931	»	86,16	0,00476	1,40
0,260	»	51,34	0,00935	»	72,60	0,00467	1,41
0,1017	»	32,20	0,00965	»	45,80	0,00477	1,42

Les lois énoncées se trouvent suffisamment vérifiées par ces expériences. Pour le même diapason, le rapport $\frac{D^2}{r}$ est constant ou à très-peu près; on sent cependant, à l'inspection des nombres, que le rapport augmente à mesure que le rayon diminue; pour le même fil, le rapport $\frac{D'}{D}$ est bien égal à $\sqrt{\frac{n'}{n}}$, qui est ici 1,41.

Détermination de la vitesse du son dans les solides.

La formule mathématique à laquelle nous sommes parvenu se trouve vérifiée par les expériences précédentes.

La distance normale de deux nœuds $D = \frac{\pi}{m}$ et, si la verge est prismatique, à section rectangulaire $m^2 = \frac{4n\pi\sqrt{3}}{ae}$, la vitesse du son a est donnée par la formule $a = \frac{4nD^2\sqrt{3}}{\pi e}$.

Si l'on veut exprimer a en prenant pour unité la vitesse du son dans l'air, nous ferons celle-ci égale à $332^{\text{mm}},2$ à zéro, conformément aux expériences de M. Moll; alors, pour la verge prismatique,

$$a = \frac{4nD^2\sqrt{3}}{\pi e \times 332,2};$$

si la verge est cylindrique et de rayon r,

$$a = \frac{4nD^2}{\pi r \times 332,2}.$$

Wertheim (¹) a déduit, comme on le sait, la vitesse du son dans les métaux du nombre de vibrations transversales de petites verges ayant une extrémité fixe et l'autre libre.

La verge, armée à son extrémité d'un stylet, trace ses vibrations sur un disque noirci qui tourne autour d'un axe horizontal. Le disque enregistre en même temps les vibrations d'un diapason compteur. On détermine ainsi avec une grande précision le nombre des vibrations exécutées par la verge en une seconde.

Mais ce procédé exige un appareil un peu compliqué que tout le monde ne peut pas avoir à sa disposition.

On simplifie, je crois, le procédé, sans lui faire perdre de sa rigueur, en substituant à la méthode graphique de Wertheim l'emploi d'un diapason servant à faire vibrer transversalement le corps que l'on étudie. On évite ainsi la difficulté que présente la détermination exacte du nombre des vibrations que fait la verge; il est donné par le nombre des vibrations du diapason, et celui-ci peut être obtenu avec précision à l'aide d'un monocorde et d'un autre diapason étalon. Le rayon des fils se déduit de la densité et du poids d'une longueur déterminée du fil. L'épaisseur des lames se mesure avec un sphéromètre.

Il ne reste plus à mesurer que la distance normale de deux nœuds consécutifs. On l'obtient avec une précision suffisante en prenant des fils assez longs pour qu'il se forme un grand nombre de nœuds et en relevant à l'aide d'un cathétomètre la distance du second nœud, comptée à partir de l'extrémité libre, au dernier voisin du diapason ou à l'avant-dernier, si l'on veut éviter les erreurs qui proviennent du déplacement du nœud, sensible surtout sur le dernier nœud.

Parfois la position des nœuds s'apprécie difficilement à l'aide du cathétomètre; on est obligé de faire vibrer légèrement le diapason; sans

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XII, p. 385.

La première formule que donne Wertheim pour calculer le coefficient d'élasticité q,

$$\log q = \log p + 3\log l - 4\log \epsilon - 3{,}38243,$$

ne conduit pas aux nombres inscrits dans son Mémoire; et, en effet, elle ne renferme que le poids, la longueur, l'épaisseur de la verge, sans autres données expérimentales. Il faudrait la remplacer par

$$V = \frac{4\pi l^2 n}{322{,}2 \times \overline{1{,}87}^2 \times \epsilon}.$$

cela, la vibration du fil est irrégulière, ou le fil se courbe d'une manière permanente s'il est d'un métal mou comme le plomb. On entoure alors le fil d'un fil de soie très-fin, on le place peu à peu à l'endroit du nœud, à égale distance de deux ventres voisins, ou au milieu de la portion du fil qui semble immobile pendant le mouvement et l'on relève ensuite au cathétomètre la position du fil de soie.

Lorsqu'on n'emploie que des fils ou des lames dont le rayon ou l'épaisseur est inférieure à 1 millimètre, les erreurs commises dans la mesure du rayon ont une grande influence sur le résultat final, influence d'autant plus grande que le rayon est plus petit; car l'erreur relative du résultat est sensiblement la même que l'erreur relative du rayon.

Ainsi, avec une lame dont l'épaisseur serait voisine de $0^{mm},1$, on devrait être sûr du chiffre des centièmes de millimètre, pour que l'erreur relative fût plus petite que 0,1, et comme a varie de 3 à 15, l'erreur absolue commise pourrait atteindre les unités. Sous ce rapport, l'emploi des fils est préférable à celui des lames.

Les erreurs absolues qui portent sur D et n ont une influence bien moindre sur le résultat final.

Voici quelques expériences que j'ai faites dans le but de déterminer la vitesse du son dans certains corps et de comparer les résultats que donne ma méthode avec les nombres donnés par Wertheim et par Masson.

Fil de cuivre rouge :

$$r = 0^{mm},1017, \quad n = 133,37, \quad 8 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 15^{mm},12, \quad x_2 - x_1 = 41,12, \quad x_8 - x_2 = 274,84;$$
$$D = 45^{mm},8, \quad a = 10,53.$$

Autre fil :

$$r = 0^{mm},526, \quad n = 133,37, \quad 3 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 34,76, \quad x_2 - x_1 = 96,32, \quad D = 110,46, \quad a = 11,08;$$

Même fil :

$$n = 268,9, \quad 4 \text{ nœuds}.$$
$$x_1 = 24,60, \quad x_2 - x_1 = 68,20, \quad x_4 - x_2 = 150,4, \quad D = 75,2, \quad a = 11,08.$$

Ce fil passé à la filière a donné un fil de

$$r = 0^{mm},44, \quad n = 133,37, \quad 3 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 32,66, \quad x_2 - x_1 = 88,44, \quad D = 97,56, \quad a = 11,05.$$

Même fil :

$$n = 268,9, \quad 4 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 23,48, \quad x_2 - x_1 = 63, \quad x_4 - x_2 = 138,92, \quad D = 69,44, \quad a = 11,30.$$

Le même fil réduit à avoir $r = 0^{m},330$:

$$n = 133,37, \quad D = 58,9, \quad a = 10,71.$$
$$n = 268,9, \quad 5 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 20,24, \quad x_2 - x_1 = 54,60, \quad x_5 - x_2 = 176,74, \quad D = 58,90, \quad a = 10,83.$$

Le même fil, passé de nouveau à la filière :

$$r = 0,2466, \quad n = 133,37;$$
$$x_1 = 25,08, \quad x_2 - x_1 = 66,08, \quad x_5 - x_2 = 218,35, \quad D = 72,77, \quad a = 10,97.$$

La moyenne de toutes ces déterminations est $a = 10,90$.

Wertheim déduit des vibrations transversales les nombres 10,84, 11,10 pour le cuivre pur. L'accord est aussi satisfaisant que possible ; car nos fils, pris dans le commerce, n'ont certainement pas la pureté de ceux qu'employait Wertheim.

ACIER. — *Ressort de montre, épaisseur* $e = 0^{mm},1791$.

$$n = 133,37, \quad 7 \text{ nœuds};$$
$$D = 54^{mm},39, \quad a = 14,57;$$
$$n = 268,9, \quad D = 38,31, \quad a = 14,62.$$

Autre ressort plus large que le précédent.

$$e = 0^{mm},1825, \quad n = 133,37, \quad 7 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 18,16, \quad x_2 - x_1 = 50,26, \quad x_7 - x_2 = 270,88, \quad D = 54,15, \quad a = 14,23.$$
$$n = 268,9, \quad D = 38,10, \quad 10 \text{ nœuds};$$
$$a = 14,25.$$

La moyenne des valeurs de a est 14,41.

Wertheim donne, pour l'acier, des nombres compris entre 14,71 et 15,67.

ZINC. — *Lame d'épaisseur* $0^{mm},1125$.

$$n = 133{,}37, \quad 9 \text{ nœuds}.$$

$$x_1 = 10{,}28, \quad x_2 - x_1 = 35{,}64, \quad x_4 - x_2 = 261{,}96, \quad D = 37{,}42, \quad a = 11{,}07.$$

Wertheim indique, pour le zinc du commerce,

$$10{,}56 - 11{,}01.$$

ALUMINIUM. — *Fil de rayon*, $r = 0^{mm},353$.

$$n = 133{,}37, \quad 4 \text{ nœuds}.$$

$$x_1 = 33{,}50, \quad x_2 - x_1 = 92{,}40, \quad x_4 - x_2 = 205{,}3, \quad D = 102{,}9, \quad a = 15{,}33.$$

Masson donne, pour l'aluminium,

$$a = 15{,}47,$$

nombre déduit des vibrations longitudinales.

PLOMB. — *Fil de* $r = 0^{mm},3618$.

$$n = 133{,}37, \quad \ldots\ldots\ldots$$
$$D = 50{,}83, \quad a = 3{,}65.$$

Wertheim donne, pour le plomb,

$$3{,}76.$$

PLATINE. — *Fil de* $r = 0^{mm},144$.

$$n = 268{,}9, \quad 9 \text{ nœuds};$$

$$x_1 = 12{,}48, \quad x_2 - x_1 = 31{,}96, \quad x_4 - x_2 = 233{,}4, \quad D = 33{,}8, \quad a = 8{,}153.$$

Wertheim donne

$$8{,}08 - 8{,}23.$$

Ces exemples suffisent pour montrer que la méthode que je propose conduit à de bons résultats.

La facilité avec laquelle des corps très-flexibles vibrent sous l'influence du diapason permet d'étendre notre procédé à de tels corps et

de déterminer la vitesse du son dans les cas où les méthodes usuelles seraient en défaut.

Ainsi une bande de papier ne peut être mise en vibrations transversales que par l'emploi d'un diapason.

Dans une de mes expériences, la bande de papier avait une largeur de quelques millimètres, une épaisseur de $0^{mm},185$.

$$n = 268,9, \quad 6 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 11,08, \quad x_2 - x_1 = 26, \quad x_6 - x_2 = 129,20, \quad D = 32,3, \quad a = 9,875.$$

Avec le même diapason, un fil de laiton d'un rayon de $0^{mm},214$ donnait des nœuds de $52^{mm},3 = D'$.

En appelant a' la vitesse du son dans le laiton, on a

$$\frac{a'}{a} = \frac{D^2\sqrt{3}\,r}{D'^2 e};$$

prenant $a' = 10$, nombre donné par Wertheim, on a

$$a = 9,866.$$

Ce mode d'opérer dispense de déterminer le nombre des vibrations du diapason, ce qui peut être utile dans certains cas.

On peut, dans ces expériences, mettre en évidence la différence d'élasticité qui existait entre le papier sec et le papier humide.

On fait vibrer une bande de papier après l'avoir laissée séjourner longtemps dans une éprouvette renfermant un peu d'eau.

On répète l'expérience lorsque la bande est restée dans l'éprouvette au-dessus du chlorure de calcium, assez de temps pour se dessécher.

Pour le papier sec, l'internœud

$$D = 30^{mm},3;$$

Pour le papier humide, l'internœud

$$D' = 25^{mm},64.$$

L'épaisseur du papier humide est un peu plus grande que celle du papier; le rapport des deux épaisseurs est 1,005 environ, ce qui résulte de la mesure directe et de ce qu'une longueur de $197^{mm},8$ de papier est devenue $198^{mm},7$ par l'effet de l'humidité.

On aura d'après cela

$$\frac{a'}{a} = \frac{25,64^2}{30,30^2 \times 1,005} = 0,7.$$

Si l'on connaissait le rapport des densités des deux bandes, on pourrait déduire du nombre précédent le rapport des coefficients d'élasticité.

MICA.

Je citerai encore une expérience que j'ai faite avec une lame étroite de mica dont l'épaisseur moyenne était $0^{mm},09$.

On la fit vibrer avec un petit diapason qui faisait $n = 509,1$ vibrations complètes. On a trouvé

$$x_1 = 4,72, \quad x_2 - x_1 = 17, \quad D = 19,40, \quad a = 13,98.$$

Ce nombre n'est qu'approché, car la lame n'avait pas partout la même épaisseur. On aurait dû trouver $x_1 = 6$ et non $4,72$, ce qui indique que la lame était plus mince vers l'extrémité libre. Là encore les vibrations doivent avoir peu d'amplitude, si l'on veut observer les nœuds; sans cela ils disparaissent, et la lame vibre dans toute sa longueur.

Vibrations des cordes et des verges dans les liquides.

Dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. LXXII, p. 560), M. Bourget s'est proposé de déterminer par le calcul l'effet que peut exercer sur les vibrations d'un corps la résistance des fluides qui l'entourent. En supposant cette résistance proportionnelle à la vitesse, il trouve que, pour les cordes, « les carrés des nombres de vibrations exécutées dans le vide sont diminués d'une quantité constante par la résistance du milieu ». Ainsi, en appelant N le nombre des vibrations dans le fluide résistant, et n le nombre des vibrations dans le vide, on a

$$N^2 = n^2 - \varepsilon^2,$$

Je me suis proposé d'étudier, par l'expérience, le sujet que M. Bourget a traité par le calcul. Les résultats que j'ai obtenus, ne confirmant pas dans toutes ses parties la loi précédente, ont provoqué de sa part de nouvelles recherches.

Guidé par cette théorie que M. Bourget m'avait fait connaître, j'ai entrepris de nouvelles expériences pour en vérifier les principales déductions.

Il n'est pas facile de faire vibrer une corde dans un liquide. La résistance du milieu éteint de suite les vibrations; si l'on ébranle la corde avec les doigts, le son est de courte durée, très-sourd, et sa hauteur fort difficile à apprécier. Il faut donc, pour rendre les expériences réalisables, entretenir d'une manière quelconque les vibrations de la corde pendant un temps assez long pour que l'on puisse en prendre l'unisson; mais, au lieu de chercher à mesurer directement le nombre de vibrations que fait une corde d'une longueur donnée, on peut renverser le problème et chercher quelle est la longueur de la corde qui rendra un son d'une hauteur déterminée. Sous cette forme, la question est plus abordable par expérience; car elle se trouve résolue, si l'on fixe la corde, par un de ses points, à un corps vibrant qui la force d'exécuter des vibrations synchrones aux siennes. Il n'est pas nécessaire que la corde ait des dimensions et une tension telles qu'elle vibre à l'unisson lorsqu'on l'ébranle isolément. Il suffit qu'elle soit assez longue pour que le son propre qu'elle rend soit plus grave que celui du corps vibrant qui doit la conduire; elle se divise alors en fuseaux plus ou moins nombreux, égaux en longueur, si l'on en excepte celui qui avoisine le point d'attache; et chacun de ces fuseaux donne la longueur de la corde qui vibre à l'unisson du corps.

Les expériences faites dans l'air sur des cordes de dimensions et de nature diverses, et décrites dans la première partie de ce Mémoire, ne laissent aucun doute à cet égard.

Le mode d'expérimentation que nous allons suivre a déjà été décrit. Le diapason est toujours horizontal, la corde verticale et supportant le poids tenseur. Dans mes premières expériences, elle était attachée directement au diapason. Il m'a semblé que, par cette disposition, le son de l'instrument était un peu altéré lorsqu'on faisait varier la tension.

C'est pour cela que j'ai attaché l'extrémité supérieure de la corde à un support indépendant du diapason. Deux tringles de fer sont fixées à ce support; elles sont libres par le bas. Un petit chevalet en plomb, formé de deux parties qui sont légèrement pressées l'une contre l'autre par un ressort, glisse le long des tringles et sert à limiter la longueur de la partie vibrante de la corde. Un second curseur, portant un petit stylet horizontal, glisse également sur les barres de fer et l'on amène sa pointe vis-à-vis du nœud dont on veut déterminer la position; puis on mesure avec une règle divisée la distance de cette pointe au chevalet.

Le poids tenseur est toujours plongé dans l'eau; mais tantôt le niveau de l'eau s'arrête au-dessus du chevalet, et alors la corde vibre dans l'air, tantôt le fil et les tringles de fer sont renfermés dans un manchon de verre que l'on remplit d'eau jusqu'au point où le fil s'attache au diapason, et alors le fil vibre dans l'eau sans que la tension ait varié.

Pour ne pas gêner les mouvements du diapason, la corde est soudée à une petite tige de cuivre de 2 centimètres de long, et 3 millimètres de diamètre; c'est cette tige qui est fixée au diapason. Lorsque l'instrument ne doit pas porter directement la corde, mais agir sur un de ses points, il porte une petite tige en forme de *z*, et la corde s'engage dans une fente que présente la partie horizontale et libre de cette tige; l'autre branche horizontale est fixée au diapason.

Dans certaines expériences, on amène le niveau de l'eau en un point de la corde éloigné et du chevalet et du diapason, et l'on peut déterminer et la distance nodale dans l'air et la même distance dans l'eau sans rien changer à la disposition de l'expérience.

Je me suis servi de trois diapasons qui rendaient à peu près les sons 1, 1,5, 2. Je les désigne par les numéros 1, 2, 3, ce dernier, le plus aigu, faisant 246 à 250 vibrations complètes par seconde; pour avoir des sons plus aigus encore, j'ai repris le procédé même de M. Duhamel, et j'ai fait agir sur le fil des plaques vibrantes. Ces plaques étaient circulaires, leur plan vertical; elles sont soutenues au centre par un axe horizontal. La corde verticale est tangente à la plaque et on la fixe au point de tangence avec un peu de cire molle. On ébranle la corde avec un archet placé à 90 degrés du point de tangence, et l'on obtient des sons très-aigus en faisant sortir les divers harmoniques de la plaque.

Je n'ai pas besoin de dire que l'on détermine la hauteur des sons des diapasons et de la plaque à l'aide d'un monocorde et d'un diapason étalon. Pour avoir avec précision le son des harmoniques élevés des plaques, il ne faut pas chercher directement sur le sonomètre la longueur de la corde qui est à l'unisson de l'harmonique : cette longueur serait trop petite et la loi des longueurs qu'il est nécessaire d'employer dans le calcul ne serait plus applicable, comme Delezenne et Savart nous l'ont appris. Il faut prendre une longueur de corde quatre ou huit fois plus grande, et faire sortir celui des harmoniques de cette corde qui doit être à l'unisson des sons de la plaque. Avec un peu d'habitude, on y arrive très-facilement, et l'on a à comparer deux sons ayant une assez longue durée et dont les intensités ne sont pas différentes, ce qui facilite la comparaison.

Lorsqu'on emploie ainsi des sons très-aigus, il se forme sur la corde un grand nombre de nœuds, et souvent l'amplitude de la vibration est tellement faible que l'on ne voit ni fuseaux ni nœuds. Il faut alors rapprocher le chevalet du point d'attache et chercher par tâtonnements la place qu'il doit occuper pour que les nœuds séparent la partie vibrante de la corde en un nombre exact de parties égales; exact n'est pas le mot propre, nos premières expériences nous ayant appris que la vibration de la corde se fait mal lorsque l'un des nœuds se trouve au point d'attache; mais qu'elle se fait avec régularité et une amplitude relativement grande, que les nœuds sont d'une netteté remarquable si le nœud supérieur est seulement voisin de ce point.

C'est dans cette position qu'il faut se placer pour voir nettement les nœuds et les déterminer avec sûreté, sinon les nœuds seront longs et les mesures un peu incertaines.

Lorsqu'on fait vibrer les cordes dans l'eau, la position des nœuds n'est pas moins difficile à obtenir avec précision. Si l'on donne aux vibrations du diapason une amplitude moyenne, la corde se partage en fuseaux peu apparents, les nœuds sont marqués par une portion de la corde qui reste immobile, mais qui est très-longue. Il faut en marquer le milieu, et la vibration est de si courte durée que l'on éprouve la plus grande peine à obtenir des nombres concordants. En répétant plusieurs fois les mesures, les différences de 7 à 8 millimètres et plus ne sont pas rares. Il y a là un fait d'appréciation personnelle qui em-

porte à sa suite d'inévitables erreurs. C'est ainsi que toutes les mesures que j'ai prises se trouvaient donner à la distance nodale une valeur plus grande que celles qu'obtenait mon préparateur. Si l'on cherche à augmenter l'amplitude des vibrations, les nœuds disparaissent, la corde vibre dans sa totalité en ne formant qu'un seul fuseau limité par une courbe légèrement ondulée; les sommets des portions de la courbe, convexes du côté de la ligne de repos, marquent bien la place des nœuds, mais cette convexité est trop faiblement accusée pour qu'on puisse la faire servir à leur détermination. Lorsque le mouvement s'affaiblit le nœud se forme par le contact des deux courbes limites de droite ou de gauche; mais il est bien difficile de saisir le point où ces lignes, presque droites, se touchent tout d'abord. Et cependant nous avons ainsi opéré pendant fort longtemps, multipliant les observations, prenant des moyennes pour arriver à éliminer les erreurs d'observation. C'est après avoir perdu ainsi beaucoup de temps que j'eus l'idée de recouvrir la corde de bulles de gaz. Je mettais cette corde en communication avec le pôle négatif d'une pile; le rhéophore positif était un fil de platine plongeant dans l'eau qui entoure la corde. Lorsqu'on fait vibrer le diapason, les bulles d'hydrogène qui recouvrent la corde sont lancées horizontalement dans le liquide; elles s'éloignent en décrivant en général des ellipses et, dans quelques cas particuliers, des lignes droites. L'amplitude de la trajectoire, ainsi décrite, diminue depuis les ventres jusqu'aux nœuds. Là les bulles s'écartent peu ou point, si la vibration de la corde n'est pas trop forte. On voit parfois les bulles tourner autour du fil à l'endroit du nœud sans s'en éloigner, et cela permet de marquer le nœud.

D'autres fois, la détermination est plus pénible; si l'on fait vibrer légèrement la corde, le mouvement des bulles n'est pas assez accusé et le nœud se montre mal. Si alors on augmente l'amplitude des vibrations, on dépasse le but et les bulles se détachent partout de la corde. Il se forme en même temps des nœuds qui appartiennent au second mouvement de la corde, à celui qui correspond au cas où les extrémités sont fixes. Ces nœuds sont souvent assez voisins du premier, de celui qu'on a intérêt à déterminer pour que l'on ne sache auquel s'adresser; entre ces nœuds voisins, les bulles dessinent un petit fuseau et l'on acquiert ainsi une preuve nouvelle de la coexistence permanente des deux

genres de mouvements annoncés par l'analyse de M. Duhamel. C'est avec les sons aigus des plaques que j'ai pu le mieux isoler le premier mouvement et que j'ai vu les bulles de gaz dessiner le plus nettement des fuseaux simples se succédant avec régularité.

Le second mouvement existe et se produit lorsque la plaque vibre fortement; mais il ne s'isole pas aussi facilement qu'il le fait avec le diapason, et mes expériences confirment sous ce rapport les résultats plus anciens de M. Duhamel, lorsque la tension est forte; si elle est faible, je retrouve les phénomènes que j'ai décrits plus haut.

Grâce à l'emploi des bulles de gaz, la détermination des nœuds dans l'eau est abordable; souvent elle se fait avec autant de précision que dans l'air, lors même que les fuseaux entre lesquels la portion immergée se divise ne seraient pas visibles directement. Souvent aussi la coexistence des divers mouvements qui peuvent animer la corde jette du trouble dans le phénomène, et il faut de l'habitude pour démêler la place du nœud. On peut s'aider alors du mouvement des bulles qui, de part et d'autre du nœud, sont lancées, les unes vers la droite, les autres vers la gauche. Pour relever la position du nœud, on amenait vis-à-vis le curseur à stylet; ou bien, d'autres fois, on plaçait le nœud dans le plan visuel d'un anneau métallique, mobile le long du tube de verre qui entourait la corde. On relevait ensuite la distance du plan ou du stylet au chevalet en immergeant une règle divisée et en l'appliquant contre la corde. On était ainsi à l'abri des effets de parallaxe qu'aurait inévitablement produits l'eau qui remplit le tube.

On peut encore fixer au diapason des fils métalliques ayant une longueur de 25 à 30 centimètres, libres à leur extrémité et qui vibrent alors à la manière des verges. Lorsque ces fils sont plongés, en tout ou en partie, dans un liquide, les nœuds s'y distribuent d'après les lois connues, c'est-à-dire que la distance de deux nœuds consécutifs, δ, est constante, que la distance de l'extrémité au nœud le plus voisin est $0,33\delta$, et que la distance de cette extrémité au second nœud est $1,25\delta$. Généralement les expériences sont faciles à faire avec les verges; les nœuds se forment nettement, on relève aisément leur position à l'aide d'une lunette et l'on mesure leur distance à l'extrémité libre sans recourir à l'emploi des bulles d'hydrogène.

On n'éprouve de difficultés sérieuses que lorsque le liquide qui en-

toure le fil est visqueux, comme l'huile, ou lorsque le fil a une faible densité, lorsqu'il est en aluminium ou en verre ; alors les nœuds les plus voisins de la surface liquide disparaissent, la verge vibre en formant un fuseau plus ou moins long qui présente seulement de légères inflexions à la place normale des nœuds. Il n'y a plus de réellement distincts que le premier et le second nœud voisins de l'extrémité libre. On peut encore déduire la distance normale de deux nœuds de celle qui sépare l'un de ces nœuds de l'extrémité ; mais les erreurs que l'on commet dans les mesures ont alors une influence plus grande qu'elles n'en ont lorsqu'on s'adresse à un nœud d'un ordre plus élevé.

Sauf de rares exceptions, je ne me suis servi que de fils cylindriques. Leur rayon se déduit du poids d'une longueur déterminée de fil.

Je ne rapporterai pas ici un très-grand nombre d'expériences que j'ai faites avec des cordes en acier, en aluminium, en laiton, et dans lesquelles je faisais varier la longueur, la tension de la corde, la hauteur du son rendu. J'observais alors les nœuds directement à la vue simple, et j'ai déjà dit combien les observations comportent d'incertitude. Je passe sous silence la partie la plus pénible de mon travail. Les mesures que j'ai prises ainsi étaient assez nombreuses pour me donner des moyennes concordantes entre elles et pour m'apprendre que le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ des distances de deux nœuds consécutifs, prises dans l'air et dans l'eau, conserve la même valeur, quelle que soit la tension ; ce rapport paraissait indépendant du nombre des vibrations que fait la corde, et il changeait avec la nature du fil et celle du liquide.

Ces divers points se trouvent confirmés par toutes les expériences que j'ai faites depuis et qui comportent, grâce à l'emploi de l'hydrogène, une précision plus grande.

J'ai fait le plus grand nombre de mes expériences avec un fil de laiton : 1 mètre de ce fil pèse $1^{gr},202$, son rayon est de $0^{mm},2$.

Le fil était d'abord supporté par le diapason.

Tension, 515 *grammes*. — *Nombre des vibrations complètes*, 128.

Longueur.	δ	
754^{mm}	256,5 à 258	suivant l'amplitude de la vibration.
664	248 à 256	suivant l'amplitude de la vibration.
512	256	Nœud au milieu, vibration de grande amplitude et de courte durée.
423	252 à 255	
255	Vibrations planes. Le son baisse.	
256	Vibrations tournantes.	

Le calcul donne pour δ le nombre 255.

On ne trouve pas toujours un accord aussi parfait entre l'expérience et la théorie. Ainsi, à quelques jours de distance, une autre série de mesures faites avec la même corde et la même tension me donnait $\delta = 265$.

Ce nombre résultait d'une dizaine de déterminations faites sous les longueurs les plus diverses. Je n'ai noté aucune particularité qui pût m'expliquer la divergence de ces deux nombres; mais cela m'a engagé à faire, séance tenante, les observations dans l'air et dans les liquides, sans rien changer à la corde, afin d'avoir des résultats comparables. J'ai dû ainsi répéter plusieurs fois certaines expériences pour avoir des moyens de contrôle.

La même corde étant entourée d'eau, j'ai eu $\delta_1 = 242^{mm}$, moyenne de sept mesures qui variaient de 238 à 247 millimètres; le rapport $\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}053$, si l'on prend $\delta = 255^{mm}$ et 1,10 avec $\delta = 265^{mm}$.

Tension, 280 grammes..	$2\delta = 380$,	$2\delta_1 = 357$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}065$.
Avec une autre longueur.	$2\delta = 363$,	$2\delta_1 = 342$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}061$.
Tension, 586 grammes..	$2\delta = 597$,	$2\delta_1 = 334$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}10$.
Avec une autre longueur.	$\delta = 298{,}5$,	$\delta_1 = 267$,	

Dans l'eau, les bulles d'hydrogène dessinaient deux nœuds voisins, c'est-à-dire formaient un petit fuseau entre deux plus grands; le second de ces nœuds donnait $2\delta_1 = 554$ et $\frac{\delta}{\delta'} = 1{,}074$.

On cherche à ajuster la longueur de la corde de telle sorte qu'il se forme un nœud unique voisin du milieu.

On note, à l'aide d'un repère, la position du nœud, et l'on verse de l'eau dans le manchon qui entoure le fil jusqu'à ce que le niveau atteigne le repère; puis on relève le chevalet que l'on a immergé, jusqu'à ce que le nœud soit ramené à la surface du liquide. On trouve 257 millimètres pour la portion immergée : 269 millimètres pour celle qui reste dans l'air,

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,05.$$

Dans une autre expérience,

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{270^{mm}}{248^{mm}} = 1,08.$$

Ce procédé entraîne, nous devons le dire, des incertitudes assez grandes, qui ne peuvent être amoindries que par une longue habitude de ces sortes d'expériences.

On a changé de diapason et pris celui qui fait 189 vibrations.

Tension 515 grammes. — Pour diverses longueurs de corde, on obtient des valeurs de δ variables de 174 à 180 millimètres.

La moyenne est 177 millimètres. Dans l'eau δ_1 varie de 157 à 160 millimètres,

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,10 \text{ à } 1,12.$$

Avec le diapason de 246 vibrations :

Tension	515gr.,	dans l'air.	$\delta = 135$,	dans l'eau.	$\delta_1 = 125$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,08.$
»	286	»	$\delta = 101,75$,	»	$\delta_1 = 95,3$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,068.$
»	586	»	$\delta = 143$,	»	$\delta_1 = 133$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,075.$

En plaçant le nœud vers le milieu de la corde, à la surface de séparation de l'eau et de l'air,

$$2\delta = 284, \quad 2\delta_1 = 263 \quad \frac{\delta}{\delta_1} = 1,08.$$

Les expériences qui suivent ont été faites en débarrassant le diapason de la charge qu'exerce le poids tenseur. La corde est fixée à un support spécial, le diapason agit sur un point intermédiaire, La corde est immergée en partie, et la portion qui avoisine le diapason reste dans l'air.

Tension, 586 grammes. — Diapason (1), 128 vibrations :

$$2\delta = 544, \quad 2\delta_1 = 515 \text{ à } 517, \quad \frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}054.$$

Diapason (2), 185 vibrations :

$$3\delta = 562, \quad 3\delta_1 = 524 \text{ à } 527, \quad \frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}067.$$

Diapason (3), 246 vibrations :

$$4\delta = 563, 562, 558, \quad 4\delta_1 = 531, 528, \quad \frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}057.$$

Enfin les expériences ont été reprises en substituant au diapason une plaque de laiton circulaire de 19 centimètres de diamètre et 4 millimètres d'épaisseur.

La portion inférieure du fil, ainsi que le poids tenseur, est entourée d'un large manchon que l'on peut remplir d'eau; le poids tenseur reste toujours immergé; le niveau de l'eau atteint le milieu de la corde environ.

Nous indiquons toujours le nombre des vibrations complètes.

NOMBRE de vibrations.	TENSION.	δ (observé).		δ (calculé).	δ_1		$\frac{\delta}{\delta_1}$
397,4	436gr	$2\delta = 155$ $4\delta = 312$ $4\delta = 310$	mm 77,60	mm 75,10	$\delta_1 = 71,5$ $2\delta_1 = 143$ $3\delta_1 = 210$	mm 70,7	1,09
	881	$6\delta = 650$ $5\delta = 543$	108,46	106,70	$3\delta_1 = 306$	102	1,058
	1794	$2\delta = 295$ $2\delta = 293$	147	152,30	$\delta_1 = 140$ $2\delta_1 = 280$ $2\delta_1 = 279$	140	1,05
943,4	436	$2\delta = 74$ $3\delta = 108$	36,5	»	$3\delta_1 = 101$ $4\delta_1 = 138$	34	1,07
	881	$2\delta = 95$ $4\delta = 190$ $6\delta = 283$	47,5	45,18	$2\delta_1 = 90$ $4\delta_1 = 177$ $6\delta_1 = 270$	44,6	1,055
	1794	$2\delta = 130$ $5\delta = 326$	64,9	64,62	$4\delta_1 = 244$ $4\delta_1 = 243$	60,5	1,06
1410	881	$3\delta = 140$	46	»	$4\delta_1 = 170$	42	1,09
1642	881	$2\delta = 56$ $4\delta = 114$	25,84	25,84	$10\delta_1 = 255$ $9\delta_1 = 230$ $6\delta_1 = 163$	25,5	1,09

Ces expériences, faites à l'aide de la plaque rendant le son fondamental et ses harmoniques, sont celles qui présentent le plus de netteté; les nœuds, dans l'air et dans l'eau, étaient bien dessinés, et la précision des mesures s'en est ressentie.

Les expériences faites avec la corde fixée directement au diapason donnent en moyenne

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}075.$$

Si le diapason est débarrassé du poids tenseur, la moyenne des valeurs du rapport est 1,062.

Avec la plaque vibrante, on trouve en moyenne 1,068.

Enfin la moyenne générale de toutes les expériences est 1,07.

Chaque groupe d'expériences montre que le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ est indépendant de la longueur de la corde et de la tension; il est le même, que la corde soit complétement immergée ou qu'elle ne le soit qu'en partie; enfin ce rapport est indépendant du nombre de vibrations que fait la corde.

Avant d'aller plus loin, je citerai une série d'expériences faites avec un fil de cuivre vibrant, à la manière des verges, sous l'influence du diapason (1); son rayon était $0^{mm},3$ et l'on a déterminé, dans l'air et dans l'eau, la distance de l'extrémité libre à un nœud d'un ordre déterminé.

Longueur du fil.		Distance à l'extrémité. Air.	Eau.	$\frac{\delta}{\delta_1}$
mm 349,80	5e nœud....	282,2	270,24	1,04
264,80	4e nœud....	215,0	206,00	1,04
180,80	3e nœud....	149,0	142,00	1,049
119,20	2e nœud....	82,0	79,00	1,05

$r = 0^{mm},44.$

Nombre de vibrations.		Air.	Eau.	$\frac{\delta}{\delta_1}$
128	3e nœud...	221,28	214,4	1,03
246	5e nœud...	160,24	154,24	1,04

$r = 0^{mm},33.$

128	3e nœud...	195,56	190,00	1,03
189	4e nœud...	232,20	222,84	1,03
189	3e nœud...	162,00	157,16	1,03
246	5e nœud...	266,56	260,56	1,02

Si l'on remarque que la précision des résultats diminue avec le nombre des nœuds, par suite des incertitudes que présente toujours leur détermination exacte, on devra conclure que le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ est indépendant de la longueur de la verge.

On voit aussi qu'il est indépendant du nombre des vibrations qu'elle exécute.

Reportons-nous maintenant à la première théorie donnée par M. Bourget.

Si l'effet de la résistance des liquides est de diminuer d'une quantité constante le carré du nombre des oscillations que fait la corde dans le vide, la longueur de la corde que j'ai appelée δ_1 et qui s'étend dans l'eau d'un nœud à l'autre, faisant alors un nombre n de vibrations, le même que le corps qui agit sur elle, cette longueur ferait dans l'air un nombre x de vibrations, et l'on aurait

$$x^2 - e^2 = n^2 \quad \text{ou} \quad x^2 = n^2 + e^2.$$

On néglige ainsi la résistance de l'air.

L'expérience nous donne la longueur δ de la corde qui vibre dans l'air à l'unisson du diapason et qui fait aussi n vibrations. On devrait donc avoir, d'après les lois connues,

$$n^2\delta^2 = (n^2 + e^2)\,\delta_1^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^2 = 1 + \frac{e^2}{n^2}.$$

Le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ devrait diminuer à mesure que n augmente, ce qui est en contradiction formelle avec toutes nos expériences.

Ainsi, en prenant $\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}10$ la plus grande des valeurs qui se rapportent au diapason le plus grave, on devrait avoir pour le plus aigu, qui est sensiblement à l'octave du premier, $\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}024$, tandis que toutes mes expériences donnent des valeurs de ce rapport supérieures à 1,05. Dans l'une d'elles, par exemple, la longueur δ a été trouvée de 140 millimètres. Si l'on admet le rapport 1,02, on en déduira

$$\delta_1 = 137^{\text{mm}} \quad \text{et} \quad 4\delta_1 = 548^{\text{mm}}.$$

L'observation directe donne $4\delta_1 = 530^{\text{mm}}$. La différence dépasse de beaucoup l'erreur que l'on peut commettre.

Les expériences faites avec les harmoniques aigus des plaques conduisent mieux encore aux mêmes conclusions.

Ainsi la seule hypothèse d'une résistance proportionnelle à la vitesse, point de départ de M. Bourget, ne suffit pas pour arriver à rendre compte par le calcul des faits que l'expérience révèle.

Celle-ci montre que l'eau agit sur la corde pour éteindre les vibrations, mais que sa résistance n'altère pas sensiblement la longueur d'ondulation.

Lorsque M. Bourget eut pris connaissance des résultats de mes expériences, il attaqua d'une autre manière la question qui nous occupe. Il suppose qu'une corde fixée à l'une de ses extrémités est mise en vibration par un diapason qui agit sur son autre extrémité. Une partie de la corde reste dans l'air, l'autre plonge dans l'eau.

Celle-ci entraîne dans son mouvement une couche de liquide adhérente; de plus le mouvement de la corde se communique au liquide environnant : de là une perte de force vive. On peut d'après cela admettre que tout se passe comme si la masse de la portion de corde immergée s'était accrue dans une certaine proportion.

On peut représenter cet accroissement de la masse de corde par celle d'une couche du liquide environnant ayant pour section σ'; la section du fil étant σ, les densités du liquide et du fil d' et d, on aura, d'après M. Bourget,

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \sqrt{1 + \frac{\sigma'}{\sigma}\frac{d'}{d}}.$$

Représentons par ρ le rapport $\sqrt{1 + \frac{d'}{d}}$. Si l'on fait le calcul pour le laiton et l'eau, en posant $d' = 1$, $d = 8,65$, on a

$$\rho = 1,064,$$

qui ne s'éloigne pas beaucoup de la moyenne que nous avons trouvée, 1,062, pour les expériences faites avec la plaque vibrante, ou de la moyenne générale 1,07.

Cependant, d'autres vérifications devenaient nécessaires.

Qu'il y ait un mouvement communiqué au liquide environnant par la corde, c'est ce qu'il n'est guère nécessaire de vérifier. Le mouvement des bulles de gaz adhérentes à la corde et qui sont lancées de manière à décrire des courbes elliptiques, le mouvement tourbillonnant des poussières qui sont en suspension dans l'eau et qui sont tantôt attirées, tantôt repoussées par le fil vibrant, le prouvent surabondamment.

Qu'une couche de liquide reste adhérente au fil et soit entraînée par lui dans son mouvement, c'est ce dont on ne saurait douter, du moins pour les liquides qui mouillent le fil.

Pour en avoir une preuve directe, j'ai formé, comme dans les expé-

riences bien connues de M. Plateau, un mélange d'eau et d'alcool ayant la densité de l'huile d'olive. On superposait deux couches d'alcool et d'eau, et, par leur mélange, elles formaient un liquide d'une densité convenable. En projetant dans ce liquide des gouttes d'huile, on a de petites sphères flottant en équilibre dans l'eau alcoolisée. On introduit, dans une de ces gouttes, un fil de cuivre fixé au diapason et formant une petite verge. En faisant vibrer le diapason, on voit le fil vibrer; la goutte d'huile lui reste adhérente lors même qu'elle serait à l'endroit d'un ventre.

Si, lorsqu'on introduit le fil, on a fait descendre la goutte de manière à l'amener dans une couche plus dense qu'elle, le mouvement vibratoire la fait glisser le long du fil jusqu'à ce qu'elle arrive à un nœud où elle s'arrête souvent. Parfois aussi elle le franchit et revient à la couche où elle se trouve en équilibre. Du reste, même dans l'air, de petites gouttes d'huile ou d'eau, déposées sur le fil à l'endroit d'un ventre, y restent adhérentes pendant le mouvement du fil, pourvu que l'amplitude du mouvement ne soit pas trop grande.

Si la goutte d'huile en équilibre dans le liquide alcoolique est un peu grosse, si le fil passe bien au centre de la sphère, celle-ci reste adhérente au fil pendant son mouvement. Elle tourne sur elle-même en recevant du fil le mouvement tournant qui l'anime; car il ne faut pas oublier que dans nos expériences, comme dans celles de M. Melde, comme dans le kaléïdophone de M. Wheatstone, chaque point de la verge décrit une petite courbe fermée circulaire ou elliptique. On voit alors la sphère d'huile s'aplatir comme dans l'expérience de M. Plateau qui se trouve ainsi réalisée très-simplement, et elle conserve cette forme aplatie tant que dure le mouvement vibratoire du fil. Si le fil est mal centré, la goutte se déforme, et la force centrifuge lui fait quitter le fil; elle se trouve alors lancée horizontalement dans le liquide. On peut répéter les mêmes expériences avec le sulfure de carbone flottant en sphère dans un mélange d'eau et d'acide sulfurique; seulement elles sont plus difficiles à réaliser. Il faut que la sphère soit assez grosse pour se laisser traverser par le fil qu'elle ne mouille plus; pour peu que le fil soit excentrique ou que le liquide environnant soit en mouvement, la sphère de sulfure quitte le fil. Cependant j'ai réussi à introduire dans une assez grosse sphère l'extrémité du fil, qui, comme on

le sait, est un ventre de vibration. Pendant le mouvement du fil, la sphère est restée adhérente à ce dernier. Elle en recevait un mouvement tourbillonnant fort curieux. Il était rendu visible par une foule de petites gouttes du liquide environnant qui pénétraient dans la sphère de sulfure, la traversaient dans tous les sens en décrivant des courbes variées et n'en sortaient que lors de la cessation du mouvement. Ces gouttes s'introduisent ainsi dans la sphère le long du fil qu'elles quittent à l'extrémité.

On reproduit quelque chose d'analogue en plongeant dans un liquide, eau ou alcool, l'extrémité d'un fil vibrant. Cette fois, ce sont des bulles d'air qui sont entraînées le long du fil et qui pénètrent dans le liquide. Si l'on place le premier nœud vis-à-vis de la surface du liquide, ce mouvement de l'air s'arrête; si, au contraire, c'est le premier ventre à partir de l'extrémité qui se trouve au niveau du liquide, l'air est entraîné et les bulles glissent jusqu'au premier nœud qui est alors immergé, puis elles remontent vers la surface en formant une espèce de cône dont la base est à la surface. Une forte vibration leur fait franchir le nœud et elles arrivent à l'extrémité de la verge.

Un phénomène qui n'a pas de rapport direct avec le sujet principal de ce travail, et sur lequel je compte revenir plus tard, se présente lorsqu'on prend pour verge un fil de verre étiré formant un tube capillaire très-fin. Son extrémité plonge dans un liquide, et ce dernier monte plus ou moins haut dans le tube capillaire. Ce fil vibre fort régulièrement à la manière des verges; mais la colonne liquide ne reste pas immobile : elle monte ou descend pendant que le tube vibre. Si l'on prend un pareil fil qui soit franchement conique, on trouve que la colonne liquide se porte toujours vers l'extrémité la plus étroite du tube. Elle monte si la base la plus large est plongée dans le liquide, elle descend si c'est l'extrémité la plus effilée; l'amplitude de ces mouvements croît avec l'amplitude de la vibration; la colonne liquide peut même être refoulée au-dessous du niveau du liquide, atteindre l'extrémité du tube, et alors des bulles d'air s'échappent par là et traversent le liquide sous-jacent. J'ai constaté que le mouvement descendant était indépendant de la position qu'occupe le ménisque par rapport aux nœuds ou aux ventres et que des vibrations longitudinales excitées dans le fil ne produisent aucun mouvement apparent de la colonne liquide.

Mais revenons à notre sujet. Pour vérifier la formule donnée par M. Bourget, j'ai opéré avec des fils vibrant, tantôt à la manière des cordes, sous une tension convenable, tantôt à la manière des verges. On verra que, pour les mêmes fils, le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ des distances de deux nœuds pris dans l'air et dans l'eau est à peu près le même dans les deux cas, et ainsi les expériences sur les verges, qui sont bien plus faciles à réaliser, peuvent servir à contrôler la formule ou nous donner du moins quelques indications sur la marche du phénomène.

Un fil de platine de $0^{mm},3$ de rayon vibre, sous l'influence du diapason (1), 128 vibrations; il est tendu à l'aide d'une vis :

$$\begin{array}{lll} \text{Air}\ldots\ldots\ldots\ldots & 3\delta = 700,\ 689,\ 684,\ 687, \quad \text{d'où} & \delta = 229,6; \\ \text{Eau}\ldots\ldots\ldots\ldots & 2\delta_1 = 450, & \delta_1 = 225,00; \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta'} = 1,02;$$

avec le diapason (3), 246 vibrations,

$$\begin{array}{lll} \text{Air}\ldots\ldots\ldots\ldots & 4\delta = 713,\ 701, & \delta = 178,\ 175; \\ \text{Eau}\ldots\ldots\ldots\ldots & 3\delta = 516,\ 504, & \delta_1 = 172,\ 168; \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,03.$$

Si nous prenons $\rho = \sqrt{1 + \frac{1}{d}}$, on trouve

$$1,022.$$

Un fil d'aluminium dont le rayon est $0^{mm},368$ vibre en corde sous l'influence de la plaque. La tension est 1994 grammes.

Le son fondamental :

$$n = 397,4;$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Air}\ldots\ldots & \delta = 171, & 2\delta = 341, & 3\delta = 510, & \delta = 170,3; \\ \text{Eau}\ldots\ldots & \delta_1 = 143, & 2\delta_1 = 285, & & \delta_1 = 142,7. \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,18.$$

Premier harmonique :

$$n = 943,4.$$

$$\text{Air}\ldots\left\{\begin{array}{l}7\delta = 527\\ 3\delta = 233\\ 2\delta = 151\end{array}\right\}\delta = 75;\qquad \text{Eau}\ldots\left\{\begin{array}{l}4\delta_1 = 254\\ 3\delta_1 = 190\end{array}\right\}\delta_1 = 63,3;$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,16.$$

La moyenne est 1,17. Le rapport calculé $\sqrt{1+\frac{1}{d}} = 1,17$.

Un autre fil d'aluminium dont le rayon est $0^{mm},27$, tendu aussi par le poids 1994 grammes et soumis à l'influence de la plaque, donne

$$n = 397,4.$$

$$\begin{array}{lllll}\text{Air}\ldots\ldots & \delta = 231,\ 233, & 2\delta = 464,\ 465, & \delta = 232,6;\\ \text{Eau}\ldots\ldots & \delta_1 = 191; & & \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,21.$$

Premier harmonique :

$$n = 943,4.$$

$$\begin{array}{llll}\text{Air}\ldots & \delta = 100^{mm}, & 2\delta = 305,\ 302, & \delta = 100,4;\\ \text{Eau}\ldots & 2\delta_1 = 166, & 3\delta_1 = 246, & \delta_1 = 82,6;\end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,22.$$

Deuxième harmonique :

$$n = 1542.$$

$$\begin{array}{llll}\text{Air}\ldots\ldots & \delta = 56, & 2\delta = 118, & \delta = 57,6;\\ \text{Eau}\ldots\ldots & \delta_1 = 189, & & \delta_1 = 47,2;\end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,21.$$

On a graissé le fil d'aluminium ; les expériences deviennent plus difficiles, parce que la couche de graisse arrête en grande partie le courant électrique, et le dégagement d'hydrogène sur le fil est très-lent ; il y a donc un peu d'incertitude dans la position exacte des nœuds. J'estime à 4 ou 5 millimètres l'étendue de l'erreur que l'on peut commettre :

$$n = 397,4.$$

$$\text{Eau}\ldots\ldots\ \delta_1 = 180,\ 184.$$

En prenant, comme tout à l'heure, $\delta = 232,6$, on a

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,28.$$

$$n = 943,4,$$

$$2\delta_1 = 151,\ 152,\ 152;$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,32.$$

Lorsque le fil n'est pas mouillé par le liquide, le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ est plus grand qu'il ne l'était lorsque le liquide le mouillait. Les nombres précédents sont un peu trop forts, parce que le poids de la légère couche de graisse qui recouvre le fil doit rendre le δ pris dans l'air un peu supérieur à 232,6.

Avec le fil d'aluminium, de rayon $0^{mm},3$, recouvert d'une couche légère de suif, on trouve

Air.......... $\delta = 164$;
Eau........... $\delta_1 = 130$ à 135;

d'où

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,21 \text{ à } 1,25,$$

tandis que les expériences faites avec le fil dégraissé nous ont donné

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,17.$$

En faisant vibrer, en verge, le même fil sous l'influence du diapason (1), on a

$$\text{Air.....}\begin{cases} x_1 = 279,04, & \delta = 85,8, \\ x_3 = 194,12, & \delta = 86,2. \end{cases}$$

$$\text{Eau....}\begin{cases} x_1 = 253, & \delta_1 = 77,8, \\ x_3 = 175,48, & \delta_1 = 77,9. \end{cases}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,15.$$

Avec le diapason (3) :

$$\text{Air.....}\left\{\begin{array}{ll} x_4 = 325{,}72, & \delta = 62, \\ x_5 = 260{,}64, & \delta = 61{,}3. \end{array}\right.$$

$$\text{Eau....}\left\{\begin{array}{ll} x_4 = 291{,}88, & \delta_1 = 55{,}6, \\ x_5 = 295{,}68, & \delta_1 = 56. \end{array}\right.$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}13.$$

Je dois dire que le fil recouvert d'une couche légère de cire m'a redonné le rapport 1,17 comme le fil dégraissé.

Un fil de fer aciéré (corde de piano), ayant pour rayon $0^{mm},25$, a été substitué au fil d'aluminium. La charge était encore 1994 grammes :

$$n = 397{,}4.$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Air......} & \delta = 136, & 2\delta = 271, & 3\delta = 405, & \delta = 135{,}5; \\ \text{Eau.....} & 2\delta_1 = 260, & \delta_1 = 130; & & \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}038.$$

$$n = 943{,}4.$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Air......} & \delta = 62^{mm}, & 2\delta = 121, & 4\delta = 244, & \delta = 61; \\ \text{Eau.....} & 5\delta_1 = 289, & & & \delta_1 = 57{,}8; \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}05.$$

$$n = 1642.$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Air......} & \delta = 38, & 2\delta = 75, & 3\delta = 112, & \delta = 37{,}5; \\ \text{Eau.....} & 7\delta_1 = 249, & 8\delta_1 = 285, & & \delta_1 = 36; \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}04.$$

La moyenne est 1,04. Le calcul donne, pour $\sqrt{1 + \frac{1}{d}}$, la valeur 1,062. En posant $\frac{\delta}{\delta_1} = \sqrt{1 + \frac{\sigma'}{\sigma d}}$, on trouverait

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = 0{,}638;$$

si l'on calculait d'après cela l'épaisseur d'une couche uniforme de

liquide qui devrait être entraînée par le fil pendant sa vibration, on trouverait

$$e = 0^{mm},07.$$

Les expériences faites avec le fil de fer recouvert d'une couche légère de graisse ou de cire m'ont donné à très-peu près les mêmes valeurs pour le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$.

J'ai pris pour cordes des fils de cuivre rouge. Ces fils provenaient d'un même échantillon de cuivre que l'on a fait passer à la filière, de manière à avoir des fils de diamètres divers. C'est toujours la plaque qui est le corps vibrant.

Tension 1994 grammes, $r = 0^{mm},39$, $n = 397,4$:

Air..... $2\delta = 174$, $4\delta = 352$, 350, $\delta = 87,5$;
Eau.... $2\delta_1 = 170$, $3\delta_1 = 256$, 255, $\delta_1 = 85$;

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,0294.$$

Autre fil,

$$r = 0^{mm},25 :$$

Air..... $\delta = 124$, $2\delta = 253$, $3\delta = 380$, $4\delta = 511$, $\delta = 125,5$;
Eau.... $2\delta_1 = 253$, $\delta_1 = 121,5$;

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,033.$$

Autre fil,

Tension 420 grammes. $r = 0^{mm},1$:

Air..... $\delta = 157$, $2\delta = 316$, 314, $\delta = 157,3$;
Eau.... $2\delta_1 = 289$, 295, $\delta_1 = 145$, 147, $\delta_1 = 146$;

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,076.$$

Le rapport, sensiblement constant pour les gros fils, diminue au contraire d'une manière bien sensible lorsqu'on prend un fil très-fin. Les expériences faites sur les fils de cuivre rouge d'un rayon supérieur à 0,3 nous avaient donné

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,03 \text{ à } 1,04,$$

lorsqu'ils vibrent en verge. Le rapport théorique $\sqrt{1+\frac{1}{d}}$ est ici 1,033. Si l'on calcule le rapport $\frac{\sigma'}{\sigma}$ et l'épaisseur e de la couche liquide supposée adhérente au fil, on trouve

r	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	$\frac{e}{r}$	e	$\frac{\sigma'}{\sigma d}$
mm 0,39	0,532	0,229	mm 0,089	0,0596
0,25	0,599	0,263	0,065	0,067
0,10	1,408	0,551	0,0551	0,158

$\frac{\sigma'}{\sigma d}$ représente le rapport de la masse additionnelle du liquide entraîné par le fil à la masse du fil lui-même; on voit qu'elle va en croissant à mesure que le diamètre diminue.

Il en est de même de $\frac{e}{r}$; si l'on calcule les valeurs absolues de e, on voit que ces valeurs diminuent au contraire avec le diamètre.

Cette influence du diamètre, que nous avions déjà trouvée avec des fils d'aluminium, était importante à bien constater. Elle se retrouve dans les expériences suivantes; elles ont été entreprises pour reconnaître si la valeur du rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ dépend seulement des densités du fil métallique et du liquide environnant, ou si la nature particulière de ce dernier a quelque influence.

On a fait un mélange d'eau et d'alcool ayant exactement la densité de l'huile d'olive, 0,923. Un autre mélange d'eau et d'acide sulfurique a la densité 1,26 du sulfure de carbone. On a fait vibrer dans chacun de ces liquides de petites verges de cuivre de diamètres différents : on avait, d'une part, deux liquides, l'eau alcoolisée et le sulfure de carbone ayant la mobilité de l'eau, sinon plus; d'autre part, deux liquides visqueux à des degrés différents, l'eau chargée d'acide sulfurique et l'huile.

Dans le tableau suivant, je désigne par x_n la distance observée du $n^{ième}$ nœud à l'extrémité; on obtient δ en divisant x_n par le nombre $(n-2)+1,25$.

Le corps vibrant est le diapason (1).

RAYON.	AIR.	δ	EAU et ACIDE SULFURIQUE.	δ_1	$\frac{\delta}{\delta_1}$	SULFURE de carbone.	δ_1	$\frac{\delta}{\delta_1}$
mm 0,643	x_2... 145,1	116,80	x_2... 140,0	112,0	1,033	x_2... 140,0	112,0	1,033
	x_2... 144,7	115,70	x_2... 138,8	110,7		x_2... 138,8	110,7	
0,500	x_2... 132	105,60	x_2... 128,1	102,4	1,030	x_2... 128	102,4	
0,300	x_3... 185,6	82,50	x_3... 176,1	78,2	1,047	x_3... 178,4	79,2	1,030
	x_3... 183,5	81,50	x_3... 175,8	78,1		x_3... 179,3	79,7	
	x_2... 104,3	83,40	x_2... 99,3	79,4		x_2... 102	81,6	
0,100	x_6... 237,5	46,01						1,038
	x_4... 147,7	46,10	x_4... 138,8	43,2	1,062	x_4... 143,2	44,6	1,022
	x_3... 101,9	45,60	x_3... 95,5	43,2		x_3... 99,5	45,0	

Lorsque les fils sont relativement gros, la nature du liquide n'a pas d'influence; mais celle-ci se montre pour le fil très-fin de $0^{mm},1$ de rayon. Si l'on cherche le rapport $\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$ de la masse additionnelle de liquide à la masse du fil, on trouve

Rayon.	Eau et acide.	Sulfure de carbone.
0,643	0,067	0,067
0,500	0,061	0,061
0,300	0,096	0,077
0,100	0,138	0,042

L'influence du liquide le plus visqueux, eau et acide, sur le fil fin est beaucoup plus grande que celle du sulfure de carbone qui, comme nous l'avons vu, ne semble pas mouiller le fil.

Rayon.	Air.	Eau et alcool.	$\frac{\delta}{\delta_1}$	Huile.	$\frac{\delta}{\delta_1}$
0,643	x_1... 143,6 / 143,1	139,4	1,0286	135,7	1,057
0,5	x_2... 131,8	128,1	1,0288	124,4	1,059
0,3	x_2... 184,2	178,0	1,035	165,9	1,110
0,1	x_4... 148,8 / 149,3	x_4... 138,9	1,080	x_2... 42,9	1,291
		x_3... 93,9			

Ce tableau donne lieu aux mêmes remarques que le précédent. Les gros diamètres donnent des valeurs voisines du rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ pour cha-

cun des deux liquides; mais les rapports augmentent et s'éloignent l'un de l'autre à mesure que le diamètre diminue.

La valeur du rapport est, pour l'huile, toujours plus grande que le rapport calculé $\sqrt{1+\frac{1}{d}} = 1,050$, quoiqu'il s'en rapproche beaucoup pour les gros fils; mais la différence s'accentue et devient très-grande pour le fil fin. Il est bon de remarquer que, pour ce dernier, l'huile empêche complétement le fil de vibrer, et l'on ne peut obtenir de mesures qu'en plongeant dans l'huile l'extrémité seule du fil, de manière qu'il ne se forme que deux nœuds dans l'huile.

Le rapport $\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$ et $\frac{\sigma'}{\sigma}$ sont, dans ce cas,

	Eau et alcool.			Huile.		
Rayon.	$\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	e	$\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	e
mm 0,6	0,0580	0,566	mm 0,151	0,117	1,143	0,278
0,5	0,0584	0,570	0,126	0,121	1,185	0,239
0,3	0,071	0,694	0,090	0,232	2,264	0,242
0,1	0,166	1,455	0,057	0,666	6,504	0,274

On ne peut que signaler d'une manière générale la marche croissante des deux rapports $\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$ et $\frac{\sigma'}{\sigma}$, lorsque le diamètre diminue, et la marche décroissante de e. On remarque que ces diverses quantités ont des valeurs bien plus grandes pour l'huile, liquide visqueux, que pour l'eau alcoolisée de même densité; mais la loi qui règle les variations de ces quantités nous échappe complétement.

Pour raccorder ces expériences sur les verges avec celles qui sont relatives aux cordes, j'ai fait vibrer, sous l'influence de la plaque, le fil fin de $0^{mm},1$; il était tendu par un poids de 500 grammes. J'ai trouvé :

Air...............	$\delta = 158,\ 158,1,\ 160,$	en moyenne 159;
Eau..............	$\delta_1 = 150$ en moyenne,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,06;$
Eau et alcool......	$\delta_1 = 147,4,$	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,08;$
Sulfure de carbone.	$\delta_1 = 150,8,$	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,054;$
Eau et acide.......	$\delta_1 = 148,6,$	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,07.$

52.

Les nœuds étaient déterminés à la vue simple et, par suite, avec des erreurs inévitables. Les nombres ainsi obtenus sont un peu plus forts que ceux que donnent les verges, mais les différences peuvent être attribuables aux erreurs d'expériences.

Pour varier autant que possible ces expériences, j'ai fait vibrer des verges formées par des fils de platine et de verre dans des liquides de densités différentes; elles étaient fixées au diapason (1).

Les liquides étaient l'eau, l'acide sulfurique et des mélanges renfermant 10, 20, 40, 60, 80 pour 100 d'acide; ils sont définis ici par leurs densités.

Fil de platine; $r = 0^{\text{mm}},346$.

Air................ $x_4 = 249{,}5$, $\delta = 76{,}76$.

d'où $x_1 = 172{,}71$,

Densité (¹).		mm	δ	$\frac{\delta}{\delta_1}$	$\sqrt{1+\frac{d'}{d}}$	$\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	e (mm)
1,000	x_3....	169,6	»	1,019	1,021	0,042	0,844	0,122
1,062	x_3....	169,0	»	1,021	1,022	0,042	0,845	0,122
1,128	x_3....	168,7	»	1,023	1,024	0,046	0,904	0,136
1,280	x_3....	168,0	»	1,028	1,027	0,057	1,020	0,145
1,459	x_3....	166,6	»	1,036	1,030	0,073	1,154	0,154
1,681	x_3....	165,0	»	1,046	1,034	0,094	1,287	0,182
1,825	x_3....	164,2	»	1,051	1,038	0,146	1,306	0,182

Fil de platine; $r = 0^{\text{mm}},1286$.

Air	x_6....	242,5	46,18					
Eau	x_6....	239,5	45,62	1,012	»	0,024	0,568	0,100
	x_4....	148,5	45,69					
1,062	x_6....	239,7	45,84	1,007				
	x_6....	149,0	45,84					
1,128	x_3....	148,0	45,50	1,015	»	0,030	0,622	0,110
1,280	x_4....	148,0	45,56	1,017	»	0,034	0,626	0,110
	x_4....	147,5	45,56					
	x_3....	102,0	45,33					
1,439	x_4....	147,2	45,29	1,023	»	0,466	0,930	0,136
	x_3....	101,8	45,24					
1,681	x_4....	144,7	44,52	1,036	»	0,073	1,063	0,174
	x_3....	100,0	44,40					
1,825	x_4....	141,0	43,30	1,064	»	0,132	1,705	0,257
	x_3....	97,6	43,40					

(¹) Le même fil, tendu et vibrant en corde, nous a donné $\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}02$ à $1{,}03$.

Si l'on détermine les hauteurs auxquelles s'élèvent les liquides employés dans un tube capillaire de $0^{mm},31$ de diamètre, on trouve les nombres suivants : on a placé vis-à-vis les valeurs précédentes de e calculées en supposant égales à 1 celles qui conviennent à l'eau.

	Densités.	h		h	Fil fin. e	Gros fil. e
		mm				
Eau....	1	44,42	ou	1	1	1
	1,062	46,82		0,95	0,99	1
	1,128	34,96		1,11	1,11	1,11
	1,280	36,26		1,12	1,11	1,19
	1,459	31,20		1,42	1,36	1,35
	1,681	25,34		1,75	1,74	1,49
	1,825	15,54		2,20	2,57	1,48

En rapprochant ainsi les rapports des épaisseurs de la couche liquide, supposée adhérente au fil, des rapports inverses des hauteurs capillaires, on trouve une analogie remarquable dans la marche croissante de ces nombres. Il y a même pour le fil le plus fin une ressemblance entre les nombres correspondants qui ferait supposer que ces nombres sont égaux. Pour savoir si ce n'était pas une ressemblance fortuite, j'ai répété les expériences en prenant pour verge un fil de verre dont la faible densité, 2,45, contrastait avec celle du platine; son rayon est $0^{mm},005$. Les expériences ont une précision moindre que les précédentes, parce que, dans la portion immergée de la verge, les nœuds ne se forment pas aussi nettement. Le fil prend cette forme de fuseau ondulé que nous avons signalée maintes fois, et les nœuds, surtout celui qui avoisine la surface, ne sont plus représentés que par une inflexion du fil. Ce nœud est d'autant moins net que le liquide est plus dense.

Densités.		δ	$\frac{\delta}{\delta_1}$	$\sqrt{1+\frac{d'}{d}}$	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	$\frac{e}{r}$
	mm					
Air	x_4.... 215,20	66,21				
1,000	x_4.... 129,80	57,68	1,148	1,286	0,780	0,30
1,062	x_4.... 129,60	57,60	1,149	1,197	0,572	0,25
1,128	x_4.... 126,50	56,22	1,177	1,208	0,911	0,38
1,280	x_4.... 123,00	54,88	1,206	1,233	0,780	0,33
1,459	x_4.... 118,10	52,49	1,259	1,263	0,970	0,40
1,681	x_4.... 106,30	47,24	1,401	1,298	1,810	0,84
1,825	x_4.... 97,89					
1,825	x_4.... 102,20	44,26	1,495	1,321	2,380	0,84
1,825	x_2.... 55,00					

Si l'on représente encore par 1 le rapport $\frac{e}{r}$ qui convient à l'eau, on trouve que les autres rapports sont représentés par des nombres 0,83, 1,25, 1,10, 1,32, 2,21, 2,74, qui croissent bien comme les rapports inverses des hauteurs capillaires, mais qui s'en éloignent en valeur absolue.

Du reste, des expériences tentées avec des liquides autres que des mélanges d'eau et d'acide ne vérifient pas mieux la liaison que nous avions présentée.

Ces expériences ont été faites avec le fil de platine ayant pour rayon $0^{mm},128$. On a pris la distance du quatrième nœud à l'extrémité libre.

	Densités.	x_4	$\frac{\delta}{\delta_1}$	$\sqrt{1+\frac{d'}{d}}$	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	e	h
Air...........	»	149,28 149,46	»	»	»	»	»
Éther.........	0,739	149,20	1,001	1,014	0,005	mm 0,002	15,18
Benzine.......	0,797	148,72	1,004	1,017	0,235	0,014	18,40
Alcool........	0,821	148,40	1,006	1,017	0,353	0,020	17,92
Acide acétique.	1,052	147,20	1,016	1,022	0,731	0,040	15,50

Dans ces liquides, qui sont également dépourvus de viscosité, la densité a une influence presque exclusive sur les valeurs obtenues de $\frac{\delta}{\delta_1}$, de $\frac{\sigma'}{\sigma}$ et de e, qui croissent avec elle, et l'on ne trouve plus aucune liaison apparente entre les valeurs de e et les hauteurs h des mêmes liquides, dans un tube capillaire.

Les valeurs du rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ seraient fort différentes si l'on prenait pour verges des lames métalliques, un ressort de montre par exemple.

Ainsi un ressort d'acier m'a donné, pour le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$, 1,007 s'il vibre successivement dans l'air et le sulfure de carbone, et 1,03 dans un mélange d'eau et d'acide sulfurique de même densité que le sulfure, ce qui montre encore la grande influence de la viscosité du liquide.

Avec un ressort d'acier, on a obtenu les nombres suivants :

				δ	$\frac{\delta}{\delta_1}$	$\sqrt{1+\frac{1}{d}}$.
Diapason (1)...	Air....	x_3...	194,68	45,3	»	»
		x_4...	145,36			
		x_5...	101,68			
	Eau...	x_6...	169,68	32,3	1,41	1,062
		x_5...	135,96	32,0		
Diapason (2)...	Air....	x_4...	157,48	50	1,38	»
	Eau...	x_4...	114,08	35,1		
Diapason (3)...	Air....	x_4...	135,72	31,6	1,39	»
		x_5...	104,72	32,2		
	Eau...	x_6...	124,72	22,9		

Le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ est encore ici indépendant du nombre des vibrations.

		Densités.	δ_1	$\frac{\delta}{\delta_1}$
Diapason (1)...	Sulfate de soude.......	1,182	32,75	1,383
	Dissolution de gomme.	1,079	31,05	1,459
	Eau..................	1,000	32,2	1,407
	Huile................	0,923	31,1	1,457
	Alcool..............	0,021	34,8	1,305
	Éther................	0,739	34,29	1,298

L'influence de la viscosité du liquide est révélée par les observations relatives à l'huile et à la dissolution de gomme, qui donnent pour δ_1 la même valeur à peu près, quoique l'une soit moins et l'autre plus dense que l'eau.

On remarquera que la distance des nœuds est, dans les liquides, beaucoup plus faible avec les lames qu'avec les fils cylindriques. Les rapports $\frac{\delta}{\delta_1}$ diffèrent tellement de $\sqrt{1+\frac{d'}{d}}$, que la comparaison de ces deux quantités semble inutile, et qu'on doit conclure simplement que le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ dépend de la forme des corps vibrants.

En laissant de côté les lames vibrant à la manière des verges, et ne considérant que des fils cylindriques et surtout ceux qui, convenablement tendus, peuvent vibrer comme des cordes, on peut résumer toutes nos expériences de la manière suivante :

1° La distance de deux nœuds consécutifs diminue lorsque la corde passe de l'air dans un liquide, en faisant dans les deux cas le même nombre de vibrations.

2° Le rapport des deux distances nodales, prises successivement dans l'air et dans un liquide, est indépendant de la longueur totale de la corde, de la longueur de la portion immergée, de la tension de la corde, du nombre des vibrations qu'elle fait par seconde.

3° Ce rapport augmente lorsque le diamètre du fil diminue. L'augmentation, peu sensible pour de gros fils, s'accroît beaucoup lorsque le diamètre est très-petit.

4° Le rapport change avec la nature du fil et celle du liquide. On a pour les fils un peu gros une valeur approchée du rapport en calculant l'expression $\sqrt{\frac{d+d'}{d}}$, dans laquelle d et d' représentent les densités du fil et du liquide.

Cependant, pour les liquides visqueux, le rapport ainsi calculé s'éloigne plus du rapport observé qu'il ne le fait pour les autres.

Si l'on veut mettre d'accord les nombres observés avec ceux que l'on calcule en se servant de la formule $\frac{\delta}{\delta_1} = \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\sigma'}\frac{d}{d'}}$, on trouvera, pour le facteur $\frac{\sigma}{\sigma'}$, des valeurs variables avec la nature et les dimensions du fil, avec la nature du liquide. Tantôt ce rapport sera plus petit que 1, tantôt, pour les liquides visqueux et les petits diamètres par exemple, il sera plus grand que 1. Pour le même fil et des liquides également fluides, ce rapport croît avec la densité du liquide.

Tous ces résultats vérifient, autant que cela peut se faire, la théorie que M. Bourget a donnée de ces phénomènes.

Il y a cependant un point sur lequel la théorie et l'expérience se taisent également. Elles ne nous apprennent rien sur la cause, vraisemblablement fort compliquée, des variations du facteur $\frac{\sigma}{\sigma'}$ et sur la loi qui règle ces variations. La difficulté de déterminer avec précision, dans tous les cas, les distances nodales, l'impossibilité de traduire en nombres la viscosité des liquides ont rendu inutiles les nombreux essais que j'ai tentés dans ce sens.

THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES,

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

OU

Extension des méthodes de la Géométrie analytique de Descartes à l'étude des lieux représentés par les solutions imaginaires des équations à deux et à trois variables.

CHAPITRE PREMIER.

DES LIEUX IMAGINAIRES DONT IL SERA QUESTION DANS CE MÉMOIRE.

Une équation $f(x, y) = 0$, ne contenant qu'une variable indépendante, ne fournit qu'un nombre limité de suites de solutions réelles, embrassant des espaces plus ou moins étendus entre $+\infty$ et $-\infty$, soit par rapport à x, soit par rapport à y; mais si, dans la même équation, on remplace x par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et y par $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, les quatre variables α, β, α', β' ne se trouvant liées entre elles que par deux équations, deux d'entre elles pourront être regardées comme indépendantes; l'indétermination sera devenue double.

De même, dans une équation $f(x, y, z) = 0$, l'indétermination n'est

que double, tant qu'on n'en considère que les solutions réelles, et devient quadruple lorsqu'il s'agit des solutions imaginaires.

Il résulte de là que, si à une solution $[x, y]$ d'une équation $f(x, y) = 0$, ou à une solution $[x, y, z]$ d'une équation $f(x, y, z) = 0$, on faisait correspondre un point du plan, ou de l'espace, point dont les coordonnées réelles se formeraient, suivant des lois convenues, des parties réelles et imaginaires de x et de y, ou de x, de y et de z, et que, d'un autre côté, on associât les unes aux autres les solutions de l'équation proposée qui rempliraient une ou deux conditions choisies à l'avance, *on pourrait regarder une équation à deux variables comme représentant une courbe réelle, plus une infinité de courbes imaginaires, et une équation à trois variables comme représentant une surface réelle, plus une infinité d'infinités de surfaces imaginaires.*

Au reste, bien que le choix des conditions à remplir, pour réaliser un pareil plan, soit de lui-même arbitraire, le succès dépendra évidemment du soin avec lequel on aura eu égard à de certaines convenances.

Voici à quoi je me suis arrêté :

Pour moi, la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

d'une équation $f(x, y) = 0$ représente le point

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta',$$

et les solutions que j'associe pour former un lieu des points qui y correspondent sont celles où $\frac{\beta'}{\beta}$ aurait une valeur constante C.

De même, s'il s'agit d'une équation $f(x, y, z) = 0$, pour moi, la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}$$

représente le point

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta', \quad z_1 = \alpha'' + \beta'',$$

et les solutions que j'associe pour former un lieu des points qui y cor-

respondent sont celles où $\frac{\beta'}{\beta}$ et $\frac{\beta''}{\beta}$ conserveraient des valeurs constantes C et C_1.

La ligne composée des points

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta C,$$

qui correspondent aux solutions

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1}$$

d'une équation $f(x, y) = 0$, est l'une des *conjuguées* du lieu plan correspondant; C en est la *caractéristique*.

De même la surface composée des points

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta C, \quad z_1 = \alpha'' + \beta C_1,$$

qui correspondent aux solutions

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta C_1\sqrt{-1}$$

d'une équation $f(x, y, z) = 0$, est l'une des conjuguées du lieu correspondant; C et C_1 en sont les caractéristiques, qui la définissent.

Les deux règles que je viens d'énoncer, et que je suivrai constamment, répondent à des convenances que je regardais comme assez impérieuses pour être en quelque sorte déterminantes.

La première satisfait à cette condition, pour ainsi dire indispensable, que le même point réel réponde toujours à la même solution imaginaire transformée à la suite d'un changement quelconque d'axes; elle entraîne *la permanence des lieux représentés sur un plan ou dans l'espace par la même équation modifiée, d'une manière quelconque, par une transformation arbitraire de coordonnées*. En effet, si les formules correspondant à la transformation effectuée sont

$$x' = a + m\,x + n\,y + p\,z,$$
$$y' = b + m'x + n'y + p'z,$$
$$z' = c + m''x + n''y + p''z,$$

deux solutions correspondantes, ancienne et nouvelle, seront

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \\ z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} x' &= a + m\,\alpha + n\,\alpha' + p\,\alpha'' + (m\,\beta + n\,\beta' + p\,\beta'')\sqrt{-1}, \\ y' &= b + m'\alpha + n'\alpha' + p'\alpha'' + (m'\beta + n'\beta' + p'\beta'')\sqrt{-1}, \\ z' &= c + m''\alpha + n''\alpha' + p''\alpha'' + (m''\beta + n''\beta' + p''\beta'')\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

les points réels qui y correspondront auront donc pour coordonnées anciennes et nouvelles

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta, \\ y_1 = \alpha' + \beta', \\ z_1 = \alpha'' + \beta'', \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 = a + m\,(\alpha+\beta) + n\,(\alpha'+\beta') + p\,(\alpha''+\beta'') = a + m\,x_1 + n\,y_1 + p\,z_1, \\ y'_1 = b + m'(\alpha+\beta) + n'(\alpha'+\beta') + p'(\alpha''+\beta'') = b + m'x_1 + n'y_1 + p'z_1, \\ z'_1 = c + m''(\alpha+\beta) + n''(\alpha'+\beta') + p''(\alpha''+\beta'') = c + m''x_1 + n''y_1 + p''z_1; \end{cases}$$

ces deux points coïncideront donc.

Quant à la seconde règle, qui consiste à associer les solutions où les rapports des parties imaginaires des variables restent constants, pour former, des points correspondants, les lieux assimilables au lieu réel, cette seconde règle présente l'avantage considérable de permettre, à l'aide d'une simple transformation préalable d'axes, de rendre en même temps réelles les abscisses de tous les points d'un des lieux imaginaires considérés, s'il s'agit d'une équation à deux variables, ou leurs abscisses et leurs ordonnées, s'il s'agit d'une équation à trois variables.

En effet, pour que les coordonnées nouvelles x' et y' qui proviendraient d'une solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta C_1\sqrt{-1}$$

deviennent réelles, il suffira que

$$m + nC + pC_1 = 0, \quad \text{et} \quad m' + n'C + p'C_1 = 0;$$

ces deux équations déterminent la direction qu'il faudrait donner au nouvel axe des z pour remplir le but proposé; car, si l'on a une fois rendu réelles les abscisses et les ordonnées d'une des conjuguées, toute nouvelle transformation où l'axe des z ne subirait aucun nouveau déplacement laissera encore réelles les abscisses et ordonnées de la même conjuguée.

Toutes les analogies remarquables que les conjuguées ont avec le lieu réel se tirent de ce que leur coordonnée imaginaire et la coordonnée correspondante du lieu réel sont toujours les mêmes fonctions des mêmes coordonnées réelles, comprises seulement dans des intervalles différents, ou satisfaisant en sens contraires aux mêmes inégalités.

D'un autre côté, en ce qui concerne les recherches purement analytiques, la marche que j'ai proposée a l'avantage de substituer l'étude d'une fonction imaginaire de variables réelles à celle, bien plus compliquée, d'une fonction imaginaire de variables imaginaires. A la vérité, cette substitution paraîtrait exiger celle d'axes mobiles à des axes fixes; mais, en fait, on n'a jamais à effectuer la transformation : il suffit toujours de la supposer faite.

Les courbes que j'appelle conjuguées de la courbe réelle et dont j'étudie l'ensemble ne sont autre chose que les courbes supplémentaires que M. Poncelet faisait intervenir tour à tour, selon la nature du problème proposé, pour arriver à l'interprétation de la solution imaginaire obtenue. En d'autres termes, la courbe supplémentaire de la courbe réelle, relativement à la question posée, ne diffère pas de la conjuguée à laquelle la solution imaginaire obtenue se rapporte; la question venant à changer, toutes les conjuguées *suppléeraient* à leur tour au défaut de la courbe réelle.

D'un autre côté, la lecture de l'énoncé concret du problème proposé suffisant pour découvrir cette courbe supplémentaire, ou conjuguée, dont l'introduction devait rendre compte de la solution algébrique obtenue, M. Poncelet pouvait, avant d'établir les calculs, choisir les axes de façon que les abscisses de la conjuguée à laquelle on aurait affaire se trouvassent réelles, et que ses ordonnées (parce qu'il ne s'agissait que de courbes du second degré) manquassent de partie réelle, ce qui rendait plus facilement acceptable la suppression du

signe $\sqrt{-1}$; mais, la solution une fois obtenue et acceptée, si l'on voulait la retrouver par rapport à des axes quelconques, il faudrait bien s'y prendre comme je l'ai proposé.

Au reste, il est très-facile d'établir que la règle que j'ai adoptée pour la construction du point correspondant à une solution imaginaire d'une équation à deux ou à trois variables est la seule qui assure la permanence, sur le plan ou dans l'espace, des points représentés par des solutions imaginaires et, par suite, la permanence des lieux formés de ces points, quelque transformation que l'on fasse subir aux axes de coordonnées.

Cette démonstration ne servira pas seulement à imprimer un nouveau caractère de certitude à la méthode; en fermant le champ des hypothèses, en matière de représentation des imaginaires, elle enlèvera en même temps tout prétexte à la critique.

La question est celle-ci :

En supposant qu'on veuille figurer une solution imaginaire

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

d'une équation

$$f(x, y) = 0,$$

par un point du plan, quelles fonctions de α, β, α' et β' faudra-t-il choisir pour former les coordonnées réelles de ce point, si l'on s'impose la condition que la position de ce point ne change pas quelque transformation d'axes qu'on fasse intervenir?

En premier lieu, si l'abscisse x_1 du point est représentée par

$$x_1 = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$

son ordonnée devra l'être par

$$y_1 = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta),$$

sans quoi l'échange des deux axes de coordonnées ne laisserait pas à la même place le point représentatif de la solution.

D'un autre côté, si l'on transporte l'axe des y parallèlement à lui-même à une distance a, la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

deviendra

$$x' = (a + \alpha) + \beta\sqrt{-1}, \quad y' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1};$$

les nouvelles coordonnées du point représentatif de la solution deviendront donc

$$x'_1 = \varphi(a + \alpha, \beta, \alpha', \beta'), \quad y'_1 = \varphi(\alpha', \beta', a + \alpha, \beta),$$

et, pour que ce point ait conservé la même position, il faudra que

$$\varphi(a + \alpha, \beta, \alpha', \beta') = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') + a,$$

et que

$$\varphi(\alpha', \beta', a + \alpha, \beta) = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta),$$

quel que soit a.

Ces conditions exigent évidemment d'abord que y_1 ne contienne pas α et, par suite, que x_1 soit de même indépendant de α'; en second lieu que x_1 se compose de α et d'une fonction de β et β', et, par suite, que y_1 se compose de α' et de la même fonction de β' et β.

Ainsi déjà x_1 et y_1 seront nécessairement exprimés

$$x_1 \text{ par } \alpha + \varphi(\beta, \beta'),$$

et

$$y_1 \text{ par } \alpha' + \varphi(\beta', \beta).$$

Rapportons maintenant le lieu au même axe des x et à un nouvel axe d'ordonnées faisant avec l'ancien axe des x l'angle supplémentaire de l'ancien angle des axes; les formules de transformation seront

$$y' = y \quad \text{et} \quad x' = x + 2y\cos\theta,$$

de sorte que la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

sera devenue

$$x' = \alpha + 2\alpha'\cos\theta + (\beta + 2\beta'\cos\theta)\sqrt{-1}, \quad y' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

et que, par suite, les coordonnées du point représentatif auront dû prendre les valeurs

$$x'_1 = \alpha + 2\alpha'\cos\theta + \varphi(\beta + 2\beta'\cos\theta, \beta')$$

et

$$y'_1 = \alpha' + \varphi(\beta', \beta + 2\beta'\cos\theta).$$

Mais, d'un autre côté, elles seront devenues

$$x'_1 = \alpha + \varphi(\beta, \beta') + 2\cos\theta\,[\alpha' + \varphi(\beta', \beta)]$$

et

$$y'_1 = \alpha' + \varphi(\beta', \beta);$$

$\varphi(\beta', \beta)$ devrait donc être égal à $\varphi(\beta', \beta + 2\beta'\cos\theta)$, quels que fussent β, β' et θ. Cette condition exige évidemment que y_1 ne dépende pas de β et, par suite, que x_1 ne dépende pas de β' : x_1 et y_1 se trouveraient donc réduits,

$$x_1 \text{ à } \alpha + \varphi(\beta) \quad \text{et} \quad y_1 \text{ à } \alpha' + \varphi(\beta');$$

mais l'homogénéité exige que x_1 et y_1 soient des fonctions linéaires de α, β, α' et β'; par conséquent la seule forme admissible serait

$$x_1 = \alpha + k\beta \quad \text{et} \quad y_1 = \alpha' + k\beta',$$

k désignant une constante numérique.

Cela posé, il est bien certain que rien ne s'opposerait absolument à ce qu'on donnât à cette constante une valeur différente de 1; cela reviendrait à voir dans $\sqrt{-1}$ à la fois un signe et un nombre, tandis que nous n'y avons vu qu'un signe. Ni la figure générale des conjuguées, ni leurs propriétés essentielles ne seraient par là profondément altérées; mais d'abord la multiplication, dans un rapport quelconque, des parties imaginaires des deux coordonnées, x et y, n'aurait aucun avantage quelconque; en second lieu, cette transformation purement arbitraire romprait fort inutilement la continuité entre la courbe réelle et ses conjuguées; enfin, si l'on voulait considérer la courbe

$$y = \varphi(x) \pm k\sqrt{-\psi(x)}$$

comme conjuguée de la courbe

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)},$$

il faudrait, par les mêmes motifs, regarder la courbe

$$y = \varphi(x) \pm k^2\sqrt{\psi(x)}$$

comme conjuguée de la courbe

$$y = \varphi(x) \pm k\sqrt{-\psi(x)},$$

ce qui détruirait la réciprocité entre deux courbes conjuguées.

On voit donc que la règle que j'ai proposée, de représenter la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

par le point

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta',$$

n'offrait rien d'arbitraire, qu'elle tient à la nature des choses et qu'il serait impossible de s'y soustraire.

La même démonstration s'applique évidemment aux lieux à trois dimensions; car, pour que le point représenté par une solution imaginaire

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}$$

reste fixe dans l'espace, quelque transformation qu'on fasse subir aux axes, il faut notamment que sa projection sur le plan des x, y reste la même quelque transformation qu'on fasse subir aux axes des x et des y, dans leur plan, sans changer la direction de l'axe des z; il faut donc que les coordonnées de cette projection du point soient réalisées par

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta'.$$

D'un autre côté, la règle relative à l'ordonnée z doit être la même que celle que l'on adopte pour x et y; le z du point représentatif de la solution devra donc être

$$z_1 = \alpha'' + \beta''.$$

En résumé, les lieux imaginaires que nous nous proposons d'étudier, que nous associons à chaque lieu réel et que nous regardons comme représentés aussi bien que lui par son équation, sont, s'il s'agit d'un lieu plan, toutes les courbes que l'on obtiendrait en prenant les solutions de l'équation proposée, où le rapport des parties imaginaires de y et de x serait une constante arbitraire C, et construisant, pour chaque solution, le point qui aurait pour coordonnées les mêmes valeurs de x et de y dans lesquelles on aurait remplacé $\sqrt{-1}$ par 1; et, s'il s'agit

d'un lieu à trois dimensions, ce sont toutes les surfaces que l'on obtiendrait en prenant les solutions de l'équation proposée, où les rapports des parties imaginaires de z et de x, et de z et de y seraient des constantes arbitraires C et C_1, et construisant, pour chaque solution, le point qui aurait pour coordonnées les mêmes valeurs de x, de y et de z dans lesquelles on aurait remplacé $\sqrt{-1}$ par 1.

CHAPITRE II.

CONSTRUCTION PAR POINTS DES CONJUGUÉES ET APPLICATION AUX COURBES ET AUX SURFACES DU SECOND ORDRE.

On peut, pour discuter et construire une des conjuguées d'une courbe, soit rendre ses abscisses réelles en donnant à l'axe des y une nouvelle direction convenable et faire ensuite passer x par toutes les valeurs réelles, dans la nouvelle équation, soit calculer et construire les coordonnées des rencontres imaginaires de la courbe proposée avec des droites réelles ayant pour coefficient angulaire la caractéristique de la conjuguée qu'on veut obtenir.

L'équation $y = Cx + d$, en effet, n'admet de solutions que du système C, car, pour que

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

y satisfassent, il faut que

$$\alpha' = C\alpha + d \quad \text{et} \quad \beta' = C\beta,$$

d'où

$$\frac{\beta'}{\beta} = C.$$

Au reste les équations

$$\alpha' = C\alpha + d \quad \text{et} \quad \beta' = C\beta$$

ajoutées donnent

$$\alpha' + \beta' = C(\alpha + \beta) + d,$$

ce qui montre que le point correspondant à une solution imaginaire de l'équation

$$y = Cx + d$$

appartient à la droite réelle représentée par cette même équation.

Mais il suffira presque toujours d'avoir construit avec soin la courbe réelle pour se faire une idée générale de la distribution de ses conjuguées, et même de la figure de chacune d'elles. Il ne s'agira, pour cela, que d'appliquer les remarques suivantes, dont l'évidence dispense de toute démonstration.

Si des parallèles menées dans le plan de la courbe réelle ne la coupent pas toutes en autant de points qu'il y a d'unités dans le degré de son équation, il existe nécessairement une conjuguée ayant pour caractéristique le coefficient angulaire commun de ces parallèles; les rencontres avec cette conjuguée et avec la courbe réelle devront être, pour chaque parallèle (sauf le cas où elles auraient une des directions asymptotiques), en nombre égal au degré de l'équation.

Si l'on peut mener à la courbe réelle des tangentes parallèles à la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre réelles les abscisses d'une conjuguée, cette conjuguée passera évidemment par les points de contact de ces tangentes; elle sera elle-même tangente en ces points à la courbe réelle, et les deux courbes y auront leurs concavités tournées en sens contraires. La courbe réelle est donc l'enveloppe de ses conjuguées, ou, du moins, d'une partie de ses conjuguées.

Si toutes les droites imaginables, menées, dans le plan de la courbe réelle, parallèlement aux rayons d'un secteur circulaire, coupent toujours cette courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans le degré de son équation, la courbe n'aura pas de conjuguées dont les caractéristiques soient comprises entre les coefficients angulaires des rayons extrêmes de ce secteur. Si l'on ne peut pas mener de tangentes à la courbe réelle parallèlement à une direction donnée, et que cependant les parallèles à cette direction la coupent en un nombre de points moindre que le degré de son équation, il existera une conjuguée ayant pour caractéristique le coefficient angulaire de la direction considérée, mais cette conjuguée ne touchera plus la courbe réelle.

Les courbes imaginaires représentées par une même équation, soit

qu'elles touchent ou ne touchent pas la courbe réelle, peuvent avoir une seconde enveloppe nécessairement imaginaire.

Cette seconde enveloppe sera déterminée plus tard.

Nous désignerons habituellement les droites parallèles à la direction $y = Cx$ sous le nom de *cordes réelles de la conjuguée* C.

De même les équations d'une droite réelle

$$x = \frac{1}{C} z + d, \quad y = \frac{1}{C'} z + d'$$

n'admettent de solutions que du système [C, C']; car si l'on y fait

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1},$$

elles donnent

$$\alpha = \frac{1}{C}\alpha'' + d, \quad \alpha' = \frac{1}{C'}\alpha'' + d'$$

et

$$\beta = \frac{1}{C}\beta'', \qquad \beta' = \frac{1}{C'}\beta''.$$

Au reste, la solution réalisée représente un point de la droite réelle elle-même; car les équations précédentes ajoutées deux à deux donnent

$$\alpha + \beta = \frac{1}{C}(\alpha'' + \beta'') + d$$

et

$$\alpha' + \beta' = \frac{1}{C'}(\alpha'' + \beta'') + d'.$$

On voit par là d'abord que, pour construire par points la conjuguée [C, C'] d'une surface, au lieu de commencer par rendre réelles ses coordonnées x et y, on pourra préférablement la considérer comme le lieu des intersections imaginaires de la surface proposée et de toutes les droites réelles parallèles à la direction

$$x = \frac{1}{C} z, \quad y = \frac{1}{C'} z;$$

en second lieu, que les inverses des caractéristiques d'une conjuguée ne sont autre chose que les coefficients angulaires de la direction qu'il

faudrait donner à l'axe des z pour rendre réelles les abscisses et les ordonnées de cette conjuguée.

Nous désignerons habituellement les droites parallèles à la direction

$$x = \frac{1}{C} z, \quad y = \frac{1}{C'} z$$

sous le nom de *cordes réelles de la conjuguée* [C, C'].

L'équation d'un plan réel

$$Mx + Ny + Pz + Q = 0$$

n'est pas non plus capable de solutions de tous les systèmes; si l'on y fait

$$x = \alpha + \frac{\beta''}{C}\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \frac{\beta''}{C'}\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1},$$

il en résulte

$$M\alpha + N\alpha' + P\alpha'' + Q = 0$$

et

$$\left(\frac{M}{C} + \frac{N}{C'} + P\right)\beta'' = 0.$$

La seconde de ces équations constitue une relation entre les caractéristiques des solutions dont est capable l'équation du plan; au reste, l'addition des mêmes équations donne

$$M(\alpha + \beta) + N(\alpha' + \beta') + P(\alpha'' + \beta'') + Q = 0,$$

d'où l'on voit que la solution réalisée représente un point du plan réel lui-même.

La section totale d'une surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

par le plan réel

$$Mx + Ny + Pz + Q = 0,$$

c'est-à-dire le lieu des points réels ou imaginaires fournis par le système des deux équations, ne peut se composer, d'après ce qu'on vient de voir, que des sections effectives par ce plan, de la surface réelle et

de toutes celles de ses conjuguées dont les caractéristiques satisfont à la relation

$$\frac{M}{C}+\frac{N}{C'}+P=0;$$

or les cordes réelles de la conjuguée [C, C′] sont parallèles à la droite

$$x=\frac{1}{C}z,\quad y=\frac{1}{C'}z;$$

la condition

$$\frac{M}{C}+\frac{N}{C'}+P=0$$

exprime donc que le plan sécant est parallèle aux cordes réelles des conjuguées dont il contient les sections.

En d'autres termes, la section totale faite par un plan dans une surface quelconque se compose exclusivement de la section faite dans la surface réelle et des sections faites dans les conjuguées dont les cordes réelles sont parallèles au plan sécant.

Au reste, les courbes imaginaires qui font partie de cette section totale sont les conjuguées mêmes de la courbe réelle qui y est comprise, si du moins cette section réelle existe; car, si l'on prenait le plan sécant pour l'un des plans coordonnés, ce qui ne saurait altérer la section, on obtiendrait bien un lieu plan composé, en général, d'une courbe réelle et de toutes ses conjuguées.

Application aux courbes du second ordre.

Pour obtenir celles des conjuguées d'une ellipse dont les cordes réelles auraient une direction donnée, on pourra prendre pour axes le diamètre parallèle à cette direction et son conjugué; l'équation de la courbe prendra alors la forme

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2;$$

et, si l'on fait varier x en dehors des limites $-a'$ et $+a'$, y prendra la valeur

$$y=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{x^2-a'^2}\sqrt{-1},$$

qui, réalisée, n'est autre que celle de l'ordonnée de l'hyperbole

$$a'^2 y^2 - b'^2 x^2 = -a'^2 b'^2.$$

Ainsi les conjuguées d'une ellipse sont toutes les hyperboles qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun; elles recouvrent tout le plan sauf l'intérieur de l'ellipse.

On obtiendra de même celle des conjuguées d'une hyperbole dont les cordes réelles auraient une direction donnée, en rapportant cette hyperbole au diamètre parallèle à la direction donnée et à son conjugué.

L'équation de la courbe prendra alors l'une des formes

$$a'^2 y^2 - b'^2 x^2 = -a'^2 b'^2,$$

ou

$$b''^2 y^2 - a''^2 x^2 = \quad a''^2 b''^2,$$

suivant que le diamètre parallèle à la direction donnée sera non transverse ou transverse, c'est-à-dire suivant qu'on pourra, ou non, mener à la courbe réelle des tangentes parallèles à cette direction.

Dans le premier cas, si l'on fait varier x entre $-a'$ et $+a'$, y prendra la valeur

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{a'^2 - x^2} \sqrt{-1},$$

qui, réalisée, est celle de l'ordonnée de l'ellipse

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2;$$

dans le second, y étant toujours réel, quelque valeur réelle qu'on attribue à x, la conjuguée correspondant à la direction donnée n'existerait pas.

Ainsi les conjuguées d'une hyperbole sont toutes les ellipses qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun; mais leur caractéristique ne peut prendre les valeurs des coefficients angulaires des rayons menés du centre aux points de la courbe réelle. Chaque conjuguée touche encore la courbe réelle en deux points; mais elles ont une autre enveloppe, imaginaire : c'est le lieu des extrémités des diamètres non transverses de la courbe réelle, c'est-à-dire l'hyperbole

qu'on appelle habituellement conjuguée de la première, et que nous nommerons préférablement sa supplémentaire.

Cette hyperbole supplémentaire, lorsque la courbe est rapportée à deux de ses diamètres conjugués, et que son équation, par conséquent, est

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2,$$

est fournie par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \quad y = \beta'\sqrt{-1},$$

car la substitution donne

$$a'^2\beta'^2 - b'^2\beta'^2 = a'^2b'^2.$$

Les conjuguées recouvrent tout l'espace compris entre les deux hyperboles et ne pénètrent à l'intérieur ni de l'une ni de l'autre.

Lorsque la caractéristique se rapproche du coefficient angulaire de l'une des asymptotes, la conjuguée s'allonge de plus en plus en s'aplatissant. A la limite, la conjuguée se confond avec l'asymptote elle-même qu'elle recouvre deux fois.

Pour obtenir celle des conjuguées d'une parabole dont les cordes réelles auraient une direction donnée, on pourra prendre pour axes la tangente parallèle à cette direction et le diamètre correspondant. L'équation de la courbe prendra alors la forme

$$y^2 = 2p'x,$$

et, si l'on fait varier x de $-\infty$ à 0, y prendra la valeur

$$y = \pm\sqrt{-2p'x}\sqrt{-1},$$

qui, réalisée, n'est autre que celle de l'ordonnée de la parabole

$$y^2 = -2p'x.$$

Ainsi les conjuguées d'une parabole sont toutes les paraboles égales à la proposée, ayant avec elle un diamètre et une tangente commune, mais l'ouverture dirigée en sens contraire. Elles recouvrent tout le plan, excepté l'intérieur de la courbe réelle.

L'équation de l'ellipse évanouissante

$$a^2y^2 + b^2x^2 = 0$$

ou

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-1}\,x$$

doit nécessairement représenter les hyperboles, réduites à leurs asymptotes, qui correspondent à cette ellipse évanouissante.

Chacune des équations

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{-1}\,x \quad \text{et} \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{-1}\,x,$$

considérée isolément, représente donc un faisceau de droites divergeant de l'origine, centre de l'ellipse évanouissante.

L'enveloppe réelle des conjuguées est alors réduite à un point.

L'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2$$

offre un exemple où l'enveloppe réelle n'existe plus. Le lieu total qu'elle représente, rapporté à de nouveaux axes dirigés suivant deux diamètres conjugués de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

fournie par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \quad y = \beta'\sqrt{-1}$$

de l'équation proposée, aurait évidemment pour équation nouvelle

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = -a'^2b'^2.$$

La conjuguée dont la caractéristique aurait eu la valeur du coefficient angulaire ancien de la direction qu'on a donnée au nouvel axe des y n'est donc autre chose que l'hyperbole

$$-a'^2y^2 + b'^2x^2 = -a'^2b'^2,$$

qui touche l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

aux deux extrémités de son diamètre couché suivant le nouvel axe des y.

Ainsi les conjuguées qui composent le lieu

$$a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2$$

sont encore toutes les hyperboles qui ont, avec l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

un système de diamètres conjugués commun; mais cette ellipse n'en est plus que l'enveloppe imaginaire.

Au reste, la caractéristique d'une quelconque des conjuguées n'est plus, comme pour les conjuguées de l'ellipse réelle, le coefficient angulaire du diamètre non transverse qu'elle a de commun avec l'enveloppe, mais celle du diamètre transverse.

Le renversement de la courbure d'une conjuguée, et le changement dans le mode d'accouplement de ses quatre branches, s'est produit au moment où, l'ellipse s'évanouissant, les quatre sommets ont été un instant confondus et la courbure nulle.

Application aux surfaces du second ordre.

Les conjuguées d'un ellipsoïde sont les hyperboloïdes continus qui ont avec lui un système de trois diamètres conjugués communs.

En effet, si l'on dirige l'axe des z de manière à rendre réelles les abscisses et les ordonnées de la conjuguée qu'on veut obtenir, et ceux des x et des y suivant deux diamètres conjugués de la section faite par le plan diamétral conjugué de l'axe des z, l'équation de la surface deviendra

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1;$$

la conjuguée cherchée aura donc son z imaginaire sans partie réelle; par conséquent son équation en coordonnées réelles sera

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

qui représente l'hyperboloïde à une nappe circonscrit à l'ellipsoïde le long de la section faite dans cette surface par le plan des x, y.

Les conjuguées de l'ellipsoïde remplissent donc tout l'espace, sauf l'intérieur de cet ellipsoïde.

On verrait de même que les conjuguées de l'hyperboloïde à une nappe sont des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes à deux nappes, selon que les parallèles à leurs cordes réelles, menées par le centre, sont intérieures ou extérieures au cône asymptote. Chaque conjuguée a encore trois diamètres conjugués communs avec la surface réelle.

Les conjuguées dont les cordes réelles seraient parallèles aux génératrices du cône asymptote sont évanouissantes; mais il convient de remarquer que, lorsque la direction des cordes réelles d'une conjuguée se rapproche de celle d'une génératrice du cône asymptote, la courbe de contact de cette conjuguée avec la surface réelle tend à se réduire à deux droites parallèles, tandis que le diamètre conjugué du plan de cette courbe tend à venir se placer sur ce plan. Suivant donc que la conjuguée limite est considérée comme un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes, elle se réduit elle-même à un cylindre elliptique aplati sur le plan des deux parallèles et dans leur intérieur, ou à un cylindre hyperbolique aplati sur le même plan, mais en dehors des mêmes parallèles. Le double du plan diamétral singulier, correspondant à la direction donnée, forme donc l'ensemble des deux conjuguées évanouissantes.

Les ellipsoïdes conjugués d'un hyperboloïde à une nappe ont pour seconde enveloppe imaginaire l'hyperboloïde à deux nappes supplémentaire; mais chaque conjuguée ne touche cette enveloppe qu'en deux points.

La parallèle menée par le centre aux cordes réelles d'une conjuguée de l'hyperboloïde à deux nappes ne peut être qu'extérieure au cône asymptote, puisque toute parallèle à une droite menée du sommet à l'intérieur de ce cône couperait nécessairement la surface réelle en deux points.

Du reste on verra, comme précédemment, que les conjuguées de l'hyperboloïde à deux nappes sont les hyperboloïdes continus qui ont avec lui un système de diamètres conjugués commun, et le touchent suivant ses sections réelles.

55.

Les conjuguées dont les cordes réelles seraient parallèles aux génératrices du cône asymptote sont évanouissantes. Chacune d'elles s'aplatit sur le plan diamétral singulier correspondant à la direction de ses cordes réelles.

Les conjuguées du paraboloïde elliptique sont les paraboloïdes hyperboliques de mêmes paramètres et opposés à lui par un diamètre commun. Chaque conjuguée touche le paraboloïde elliptique suivant la section faite dans ce paraboloïde par le plan diamétral correspondant aux cordes réelles de la conjuguée. La conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles à l'axe est rejetée à l'infini.

Inversement, les conjuguées du paraboloïde hyperbolique sont les paraboloïdes elliptiques de mêmes paramètres et opposés à lui par un diamètre commun; la courbe de contact entre la surface réelle et l'une de ses conjuguées est toujours la section faite dans cette surface réelle par le plan diamétral correspondant aux cordes réelles de la conjuguée.

Pour déterminer les conjuguées d'un cône du second degré, on pourra l'assimiler à l'un des hyperboloïdes, par exemple à l'hyperboloïde à une nappe; on verra dès lors immédiatement que, si les cordes réelles d'une conjuguée sont parallèles à une droite menée du sommet à l'intérieur du cône, la conjuguée se réduira au sommet; que, si les cordes réelles sont parallèles à une génératrice du cône, la conjuguée se réduira au double du plan tangent mené suivant cette génératrice; enfin que les conjuguées non singulières sont des cônes du second degré ayant même sommet que le cône réel donné.

Pour préciser davantage, il suffira de rappeler ce qui a été dit plus haut sur les sections faites par un plan réel dans une surface et dans ses conjuguées. On verra ainsi que les conjuguées d'un cône du second degré sont tous les cônes qui auraient même sommet et pour directrices, dans tous les plans imaginables, les conjuguées des sections faites par les mêmes plans dans le cône réel, chaque plan sécant fournissant les directrices des cônes conjugués dont les cordes réelles lui seraient parallèles.

En considérant les cylindres du second degré comme des cônes dont les sommets seraient à l'infini, on pourra leur appliquer les considérations précédentes, et l'on en conclura que les conjuguées d'un cylindre du second degré sont tous les cylindres du second degré qui auraient

leurs génératrices parallèles aux siennes, et pour directrices, dans tous les plans imaginables, les conjuguées des sections faites par les mêmes plans dans le cylindre réel, chaque plan sécant fournissant les directrices des cylindres conjugués dont les cordes réelles lui seraient parallèles.

Les conjuguées de l'ellipsoïde imaginaire

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

sont les hyperboloïdes à deux nappes qui ont, avec l'ellipsoïde réel

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

un système de diamètres conjugués commun. Cet ellipsoïde est l'enveloppe imaginaire des conjuguées de l'ellipsoïde imaginaire.

Le cône imaginaire ou ellipsoïde évanouissant a encore pour conjuguées des cônes du second degré, par cette simple raison que, lorsque l'ellipsoïde se réduit à un point, les hyperboloïdes continus, qui en sont les conjuguées, se transforment en cônes.

Pareillement, les conjuguées du cylindre elliptique imaginaire sont les cylindres qui auraient pour bases, dans tous les plans imaginables, les conjuguées de l'ellipse imaginaire de section.

Quant aux conjuguées du cylindre elliptique évanouissant, ce sont des plans passant tous par l'axe de ce cylindre.

CHAPITRE III.

DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN.

La ligne droite, la circonférence de cercle, etc., en Géométrie plane, le plan, la sphère, en Géométrie à trois dimensions, sont successivement employés à l'étude de plus en plus approfondie des lieux plus compliqués.

Mais, pour que les rapports ou différences qui existent entre deux lieux puissent être mis en évidence par la comparaison de leurs équations, il

faut que les équations soient établies dans des conditions pareilles. Si le lieu que l'on veut étudier est représenté en coordonnées imaginaires, il faudra naturellement que celui qui doit servir à cette étude soit représenté aussi en coordonnées imaginaires et dans le même système. Si le lieu que l'on veut étudier est représenté par les solutions de caractéristique C, ou de caractéristiques C et C′ de l'équation qui le comprend avec d'autres, il faudra que le lieu qui servira à l'étudier soit représenté aussi par les solutions de caractéristique C, ou de caractéristiques C et C′ de l'équation qui le figurera avec d'autres.

Il résulte évidemment de là la nécessité d'obtenir, avant tout, les équations de la ligne droite et du plan en coordonnées imaginaires.

Les deux équations

$$y=(m\pm n\sqrt{-1})x+p\pm q\sqrt{-1}$$

réunies forment l'équation

$$(y-mx-p)^2+(nx+q)^2=0,$$

qui est celle d'une ellipse évanouissante réduite à son centre

$$x=-\frac{q}{n},\quad y=-\frac{mq}{n}+p.$$

Les conjuguées du lieu

$$y=(m\pm n\sqrt{-1})x+p\pm q\sqrt{-1}$$

doivent donc coïncider avec les hyperboles, réduites à leurs asymptotes, conjuguées de cette ellipse évanouissante, c'est-à-dire former deux faisceaux de droites issues du point

$$x=-\frac{q}{n},\quad y=-\frac{mq}{n}+p.$$

Il convient au reste de remarquer que, lorsque la caractéristique change, les deux droites qui forment la conjuguée correspondante de l'ellipse évanouissante tournent en même temps autour de leur point de concours fixe et ne se confondent ni, par conséquent, ne s'intervertissent jamais; d'où il résulte que chacune d'elles prend successivement toutes les directions imaginables.

Le faisceau de droites représentées par la seule équation

$$y=(m+n\sqrt{-1})x+p+q\sqrt{-1}$$

comprend donc toutes les droites qu'on peut mener du point

$$x=-\frac{q}{n},\quad y=-\frac{mq}{n}+p$$

et, par conséquent, recouvre tout le plan du tableau, sauf, bien entendu, les cas particuliers.

L'équation en coordonnées réelles de la droite, de caractéristique C, du faisceau

$$y=(m+n\sqrt{-1})x+p+q\sqrt{-1},$$

résultera de l'élimination de α, β et α' entre les équations

$$(1, 2)\qquad \alpha'+\beta C\sqrt{-1}=(m+n\sqrt{-1})(\alpha+\beta\sqrt{-1})+p+q\sqrt{-1},$$

$$(3)\qquad x=\alpha+\beta,$$

$$(4)\qquad y=\alpha'+\beta C,$$

d'où l'on tire

$$y=\left(m+n+\frac{2n^2}{m-n-C}\right)x+p+q+\frac{2qn}{m-n-C}.$$

Cette équation donne lieu à plusieurs remarques :

On voit d'abord que le coefficient angulaire varie en général avec C, de manière à pouvoir prendre toutes les valeurs, ce qui confirme ce qui a été dit plus haut.

Si l'on fait C infini, l'équation se réduit à

$$y=(m+n)x+p+q,$$

c'est-à-dire que la conjuguée à abscisses réelles du lieu se forme en remplaçant $\sqrt{-1}$ par 1 dans l'équation de ce lieu. Ce résultat sera fréquemment utilisé, parce que, en général, dans les démonstrations théoriques, on ramènera habituellement la conjuguée qu'on voudra étudier du lieu en discussion à avoir ses abscisses réelles.

Nous donnerons habituellement le nom de faisceau *elliptique* au fais-

ceau représenté par l'équation générale du premier degré. Son équation, aussi simplifiée que possible, se réduit à

$$y = n\sqrt{-1}\,x,$$

n étant moindre que 1, si l'ellipse évanouissante dont les diamètres forment ce faisceau a été rapportée à ses axes et que le grand axe ait été pris pour axe des x.

Nous dirons que le faisceau est *circulaire* lorsque l'ellipse évanouissante qui lui correspondrait sera un cercle. Un pareil faisceau, quel que soit le système d'axes rectangulaires auquel on le rapporte, aura toujours son coefficient angulaire égal à $\sqrt{-1}$; il sera représenté par

$$y = \pm\sqrt{-1}\,x + p + q\sqrt{-1}.$$

Enfin le faisceau sera parabolique si l'ellipse qui lui correspondrait a l'un de ses axes infiniment petit par rapport à l'autre, c'est-à-dire si le coefficient angulaire de ce faisceau est réel. L'équation générale des faisceaux paraboliques est

$$y = mx + p + q\sqrt{-1};$$

un pareil faisceau est composé de droites repliées toutes les unes sur les autres; en effet, si dans l'équation

$$y = mx + p + q\sqrt{-1}$$

on fait

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1},$$

il vient

$$\alpha' = m\alpha + p \quad \text{et} \quad \beta C = m\beta + q,$$

d'où, en ajoutant,

$$\alpha' + \beta C = m(\alpha + \beta) + p + q,$$

c'est-à-dire, suivant notre notation habituelle,

$$y_1 = mx_1 + p + q.$$

Le faisceau parabolique donne encore lieu à une autre remarque

importante, qui sera utilisée dans la théorie des asymptotes; l'équation

$$\beta C = m\beta + q,$$

qui donne

$$\beta = \frac{q}{C - m},$$

montre que, tout le long d'une même droite du faisceau, les parties imaginaires des coordonnées sont absolument constantes. Elles sont d'ailleurs infinies sur la droite dont la caractéristique est le coefficient même du faisceau.

L'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\, x + p + q\sqrt{-1}$$

ne saurait être considérée comme l'équation la plus générale de la ligne droite, en coordonnées imaginaires; mais il n'est pas de circonstances où elle puisse être insuffisante, par la raison toute simple que chacune des droites qu'elle représente pourra être assujettie à passer par deux points donnés à volonté par leurs coordonnées imaginaires, pourvu que ces deux points aient même caractéristique, ce qui est la condition indispensable pour qu'ils puissent faire partie des données d'une même question.

Du plan.

L'équation générale du premier degré à trois variables

$$(M + N\sqrt{-1})\, x + (P + Q\sqrt{-1})\, y + (R + S\sqrt{-1})\, z + H = 0$$

représente des plans qui se coupent tous suivant la droite

$$\begin{aligned} Mx + Py + Rz + H &= 0, \\ Nx + Qy + Sz &= 0, \end{aligned}$$

et dont l'équation générale, en coordonnées réelles, est

$$(Mx + Py + Rz + H) + (Nx + Qy + Sz)\frac{(M+N)C' + (P+Q)C + (R+S)CC'}{(M-N)C' + (P-Q)C + (R-S)CC'} = 0;$$

les trois formes principales de cette équation sont

$$(Mx + Py + Rz + H) + (Nx + Qy + Sz)\frac{R + S}{R - S} = 0,$$

$$(Mx + Py + Rz + H) + (Nx + Qy + Sz)\frac{P + Q}{P - Q} = 0,$$

$$(Mx + Py + Rz + H) + (Nx + Qy + Sz)\frac{M + N}{M - N} = 0;$$

elles représentent les plans conjugués dont les x et y, ou les x et z, ou les y et z, sont réels.

L'équation

$$(M + N\sqrt{-1})x + (P + Q\sqrt{-1})y + (R + S\sqrt{-1})z + H = 0,$$

contenant six paramètres arbitraires, suffira à la représentation du plan dans toutes les circonstances possibles, puisqu'un plan représenté par cette équation pourra toujours être assujetti à passer par trois points donnés à volonté, géométriquement et analytiquement.

De la ligne droite.

Deux équations à trois variables, à coefficients réels ou imaginaires, prises au hasard, ne fourniraient généralement qu'un nombre limité de solutions appartenant à un même système [C, C′]; pour que le contraire arrivât, il faudrait que les quatre équations dans lesquelles se décomposeraient les proposées, lorsqu'on y supposerait les variables imaginaires et telles que les rapports deux à deux de leurs parties imaginaires fussent des nombres donnés, C et C′, se réduisissent à trois; et dans ce cas, en général, C et C′ dépendraient l'un de l'autre.

On pourrait rechercher, d'après ces indications, les conditions auxquelles devraient satisfaire les équations de deux onglets de plans imaginaires, pour que leur intersection totale se composât de séries de points de mêmes caractéristiques ou de lignes droites.

Mais l'intersection totale de deux lieux n'étant en rien changée lorsqu'on substitue au système de leurs équations tout autre système équivalent, nous pourrons supposer que des équations proposées, en

éliminant entre elles successivement y et x, on ait tiré deux équations telles que

$$x = (m + n\sqrt{-1})z + p + q\sqrt{-1},$$
$$y = (m' + n'\sqrt{-1})z + p' + q'\sqrt{-1};$$

la condition cherchée alors s'obtiendra en éliminant α, α', α'' entre

$$\alpha = m\alpha'' - n\beta'' + p,$$
$$\alpha' = m'\alpha'' - n'\beta'' + p',$$
$$\frac{\beta''}{C} = m\beta'' + n\alpha'' + q,$$
$$\frac{\beta''}{C'} = m'\beta'' + n'\alpha'' + q',$$

et exprimant que l'équation résultante en β'' est identiquement satisfaite.

Or l'élimination de α'' entre les deux dernières donne

$$\beta''\left(\frac{n'}{C} - \frac{n}{C'} - mn' + m'n\right) = qn' - q'n;$$

les conditions cherchées sont donc

$$qn' - q'n = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{q}{q'} = \frac{n}{n'}$$

et

$$\frac{n'}{C} - \frac{n}{C'} = mn' - m'n.$$

La première doit être remplie par les coefficients des équations des deux plans, et la seconde lie entre elles les caractéristiques d'une des droites d'intersection.

En supposant $\frac{q}{q'} = \frac{n}{n'}$ dans les équations

$$x = (m + n\sqrt{-1})z + p + q\sqrt{-1}$$

et

$$y = (m' + n'\sqrt{-1})z + p' + q'\sqrt{-1},$$

on pourrait tirer de leur système, en les retranchant membre à membre,

une équation à coefficients réels. L'intersection totale se composerait donc d'un faisceau ou de droites.

Les équations générales de la droite dans l'espace seront, d'après ce qu'on vient de voir,

$$x = (m + n\sqrt{-1})\,z + p + p\sqrt{-1}$$

et

$$y = (m' + nk\sqrt{-1})\,z + p' + qk\sqrt{-1},$$

et les caractéristiques d'une des droites représentées par ce système d'équations seront liées entre elles par la relation

$$\frac{k}{C} - \frac{1}{C'} = mk - m'.$$

THÉORIE DES EFFETS OBSERVÉS PAR SAVART

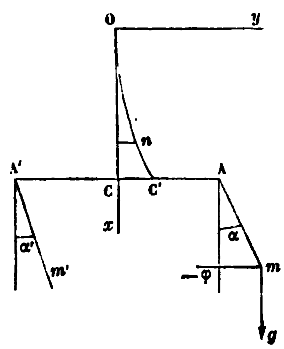
SUR

L'INFLUENCE MUTUELLE DE DEUX PENDULES,

PAR M. H. RESAL,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Les résultats obtenus par Savart, en observant les mouvements de deux pendules oscillant sur des couteaux placés aux extrémités d'une barre horizontale suspendue, en son milieu, à une verge élastique verticale, se trouvent implicitement compris dans deux équations diffé-



rentielles simultanées du second ordre, qui sont la conséquence de l'analyse suivante :

Soient

O le point d'encastrement de la lame de suspension;
$OC = h$ la longueur de cette lame;
$AA' = 2\,CA = 2\,CA' = 2\,a$ la longueur de la verge horizontale;
$Am = l$, $A'm' = l'$ les longueurs des pendules de droite et de gauche;

α, α' les angles qu'ils forment avec la verticale, positifs ou négatifs selon qu'ils sont situés à droite ou à gauche;

m, m' les masses qui terminent les pendules;

E le coefficient d'élasticité de la lame OC;

I le moment d'inertie de sa section par rapport à la perpendiculaire au plan de la figure passant par son centre de gravité.

Nous supposerons que la barre AA' est assez épaisse ou assez courte pour que l'on puisse la considérer comme rigide.

Nous ne considérerons que le cas de faibles flexions en négligeant l'allongement, d'ailleurs insignifiant, et l'inertie de la lame.

Il résulte de là que C et, par suite, AA' sont censés se déplacer constamment suivant une même horizontale. Soient, à un instant quelconque, OC' la lame déformée, et φ l'accélération de C', considérée comme positive ou négative selon qu'elle est dirigée de la gauche vers la droite ou inversement.

Concevons que l'on imprime à tout le système une vitesse et une accélération égales et contraires à celles de C ou C', de manière à ramener les points A et A' au repos.

Le point m, par exemple, possédera les deux accélérations $-\varphi\cos\alpha$, $-g\sin\alpha$, et l'on reconnaît facilement que l'on a

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha + \frac{\varphi}{l}\cos\alpha = 0.$$

Supposant que les angles α et α' soient assez petits pour que l'on puisse en négliger les puissances supérieures à la seconde, φ étant du même ordre de grandeur, il vient tout simplement

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\alpha + \dfrac{\varphi}{l} = 0 \\ \text{et de même} \\ \dfrac{d^2\alpha'}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\alpha' + \dfrac{\varphi}{l} = 0. \end{array}\right.$$

En appelant N et N' les tensions des fils Am et Am', on a

$$N = ml\frac{d\alpha^2}{dt^2} + mg\cos\alpha - m\varphi\sin\alpha.$$

La vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ restera très-petite si les pendules ne sont pas très-courts, de sorte que l'on peut poser tout simplement

$$N = mg \quad \text{et de même} \quad N' = m'g.$$

Soient maintenant

n un point de la lame;
x son abscisse verticale mesurée à partir de l'origine O;
y son ordonnée horizontale, considérée comme positive ou négative, selon qu'elle est située à droite ou à gauche de la verticale du point O.

On reconnaît facilement que

$$\begin{aligned} \mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} &= -\mathrm{N}[a\cos\alpha - (h-x)\sin\alpha] + \mathrm{N}'[a\cos\alpha' + (h-x)\sin\alpha] \\ &= ag(m'-m) + g(h-x)(m\alpha + m'\alpha'). \end{aligned}$$

En intégrant et remarquant que l'on a $\frac{dy}{dx} = 0$, et $y = 0$ pour $x = 0$, on trouve successivement

$$\mathrm{EI}\frac{dy}{dx} = ag(m'-m)\,x + gx\left(h - \frac{x}{2}\right)(m\alpha + m'\alpha'),$$

$$\mathrm{EI}\,y = ag(m'-m)\frac{x^2}{2} + g\frac{x^2}{2}\left(h - \frac{x}{3}\right)(m\alpha + m'\alpha'),$$

d'où, pour $x = h$ et en appelant f la flèche,

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{EI}f = ag(m'-m)\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}g(m\alpha + m'\alpha').$$

En différentiant deux fois cette expression par rapport à t, on trouve

$$\text{(B)} \qquad \varphi = \frac{d^2f}{dt^2} = \frac{h^3g}{3\mathrm{EI}}\left(m\frac{d^2\alpha}{dt^2} + m'\frac{d^2\alpha'}{dt^2}\right),$$

par suite

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha + \frac{h^3g}{3\mathrm{EI}l}\left(m\frac{d^2\alpha}{dt^2} + m'\frac{d^2\alpha'}{dt^2}\right) = 0, \\ &\frac{d^2\alpha'}{dt^2} + \frac{g}{l'}\alpha' + \frac{h^3g}{3\mathrm{EI}l'}\left(m\frac{d^2\alpha}{dt^2} + m'\frac{d^2\alpha'}{dt^2}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

équations dont il est facile de trouver les intégrales.

Pour plus de simplicité, supposons que les deux masses m, m' soient égales et posons

$$\frac{h^2 m}{3\mathrm{EI}} = \varepsilon; \tag{3}$$

nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2}\left(1+\varepsilon\frac{g}{l}\right)+\varepsilon\frac{g}{l}\frac{d^2\alpha'}{dt^2}+\frac{g}{l}\alpha=0,\\ &\frac{d^2\alpha'}{dt^2}\left(1+\varepsilon\frac{g}{l'}\right)+\varepsilon\frac{g}{l'}\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{g}{l'}\alpha=0.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

En posant

$$\alpha = \mathrm{A}\cos\mathrm{K}(t+\beta),\quad \alpha' = \mathrm{A}'\cos\mathrm{K}(t+\beta),$$

A, A′, K étant des constantes, il vient

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}\left[\mathrm{K}^2\left(1+\varepsilon\frac{g}{l}\right)-\frac{g}{l}\right]=-\varepsilon\frac{g}{l}\mathrm{A}'\mathrm{K}^2,\\ &\mathrm{A}'\left[\mathrm{K}^2\left(1+\varepsilon\frac{g}{l'}\right)-\frac{g}{l'}\right]=-\varepsilon\frac{g}{l'}\mathrm{A}\mathrm{K}^2.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Nous supposerons dorénavant que le pendule de gauche ne peut pas avoir une longueur inférieure à celle de l'autre pendule et nous poserons $l' = \gamma l$.

L'élimination de K entre les équations (5) donne

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'} = \frac{1-\gamma\pm\sqrt{(1-\gamma)^2+4\varepsilon^2\dfrac{g^2}{l^2}}}{2\varepsilon\dfrac{g}{l}}. \tag{6}$$

Les équations (5), multipliées respectivement par l et l', puis retranchées l'une de l'autre, donnent

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'}\left(\mathrm{K}^2-\frac{g}{l}\right)=\mathrm{K}^2\gamma-\frac{g}{l},$$

d'où

$$\mathrm{K}=\sqrt{\frac{\dfrac{g}{l}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'}-1\right)}{\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'}-\gamma}}. \tag{7}$$

Nous n'entrerons pas dans plus de détails, quant à présent, sur la

détermination des deux valeurs de K, que nous représenterons par K_1 et K_2. En appelant A_1, A_2 et A'_1, A'_2 les valeurs correspondantes de A et A', dont les rapports sont définis par l'équation (6), nous aurons

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha = A_1 \cos K_1 (t+\beta_1) + A_2 \cos K_2 (t+\beta_2), \\ \alpha' = A'_1 \cos K_1 (t+\beta_1) + A'_2 \cos K_2 (t+\beta_2), \end{cases}$$

β_1 et β_2 étant deux arbitraires dépendant des conditions initiales du mouvement.

APPLICATIONS.

I. — *Pendules égaux.*

Les équations (6) et (7) donnent, en y supposant $l = l'$ ou $\gamma = 1$,

$$A_1 = A'_1, \quad A_2 = -A'_2,$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{g}{l\left(1 + 2\varepsilon \frac{g}{l}\right)}},$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

On a donc

$$\alpha = A_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l\left(1 + 2\varepsilon \frac{g}{l}\right)}}(t+\beta_1) + A_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}(t+\beta_2),$$

$$\alpha' = A_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l\left(1 + 2\varepsilon \frac{g}{l}\right)}}(t+\beta_1) - A_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}(t+\beta_2).$$

1° *Les pendules sont abandonnés à eux-mêmes après avoir été également écartés en sens inverse de la verticale.*

Comme on peut choisir à volonté l'origine du temps, nous suppo-

serons que la mise en mouvement a lieu lorsque $t = -\beta_2$, ce qui revient à supposer $\beta_2 = 0$, en comptant maintenant le temps à partir de cette dernière époque. Nous aurons ainsi

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha = A_1 \cos(t + \beta_1)\sqrt{\dfrac{g}{l\left(1+2\varepsilon\dfrac{g}{l}\right)}} + A_2 \cos\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,t, \\[2ex] \alpha' = A_1 \cos(t + \beta_1)\sqrt{\dfrac{g}{l\left(1+2\varepsilon\dfrac{g}{l}\right)}} - A_2 \cos\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,t, \end{cases}$$

Soient α_0 et $-\alpha_0$ les écarts initiaux des pendules de droite et de gauche, on doit avoir

$$\alpha_0 = A_1 \cos\beta_1 \sqrt{\frac{g}{l\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}},$$

$$-\alpha_0 = A_1 \cos\beta_1 \sqrt{\frac{g}{l\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}} - A_2,$$

ce qui exige que $A_1 = 0$, $A_2 = \alpha_0$, d'où

$$\alpha = -\alpha' = \alpha_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Les deux pendules se meuvent donc comme s'ils étaient complétement isolés, et la lame OC n'éprouve aucune déviation, résultat obtenu par Savart, et que l'on devait prévoir en raison de la symétrie.

2° *Les pendules sont abandonnés à eux-mêmes après avoir été également écartés de la verticale dans le même sens.*

En vertu des équations (9) on a

$$\alpha_0 = A_1 \cos\beta_1 \sqrt{\frac{g}{l\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}} + A_2,$$

$$\alpha_0 = A_1 \cos\beta_1 \sqrt{\frac{g}{l\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}} - A_2,$$

d'où $A_2 = 0$, et comme $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, $\frac{d\alpha'}{dt} = 0$, pour $t = 0$, on a

$$\sin \beta_2 \sqrt{\frac{g}{l\left(1 + 2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}} = 0,$$

ce qui exige que $\beta_2 \sqrt{\frac{g}{l\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}}$ soit un multiple de π. Supposons que ce soit un multiple pair, l'hypothèse inverse conduirait au même résultat; nous aurons

$$\alpha_0 = A_1, \quad \alpha = \alpha' = \alpha_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{l\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}}.$$

Le mouvement des pendules est donc le même et de plus isochrone; la durée T d'une oscillation est donnée par

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}.$$

Il suffit de se rappeler la signification de ε pour trouver dans cette formule l'énoncé suivant de Savart :

La durée des oscillations est d'autant plus grande que la verge verticale est plus longue et plus mince, et que les pendules sont plus lourds et plus courts.

Savart ajoute :

La verge verticale fait alors des oscillations isochrones avec celles des pendules.

C'est ce qui résulte des formules (A) et (B), en y supposant $m = m'$.

3° *L'un des pendules est en repos lorsque l'autre commence à se mettre en marche.*

On a

$$\alpha_0 = A_1 \cos\beta_1 \sqrt{\frac{g}{l\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}} + A_2,$$

$$0 = A_1 \cos\beta_1 \sqrt{\frac{g}{l\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}} - A_2.$$

On est conduit comme plus haut, en exprimant que $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ pour $t = 0$, à admettre que le coefficient de A_1 est égal à l'unité, d'où

$$\alpha_0 = A_1 + A_2, \quad 0 = A_1 - A_2,$$

par suite,

$$A_1 = A_2 = \frac{\alpha_0}{2},$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{2}\left[\cos t\sqrt{\frac{g}{l\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}} + \cos t\sqrt{\frac{g}{l}}\right],$$

$$\alpha' = \frac{\alpha_0}{2}\left[\cos t\sqrt{\frac{g}{l\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l}\right)}} - \cos t\sqrt{\frac{g}{l}}\right].$$

Posant pour plus de simplicité

$$2\lambda = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon\frac{g}{l}}}\right),$$

$$2\mu = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon\frac{g}{l}}}\right),$$

il vient

$$\alpha = \alpha_0 \cos\lambda t \cos\mu t,$$

$$\alpha' = \alpha_0 \sin\lambda t \sin\mu t,$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha_0(\lambda \sin\lambda t \cos\mu t + \mu\cos\lambda t \sin\mu t),$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \quad \alpha_0(\lambda\cos\lambda t \sin\mu t + \mu \sin\lambda t \cos\mu t).$$

L'angle α s'annulera, ou le premier pendule se trouvera dans la verticale, pour des valeurs de t données par

$$t = \frac{i}{\lambda}\frac{\pi}{2}$$

ou

$$t = \frac{i}{\mu}\frac{\pi}{2},$$

i étant un nombre impair. Les vitesses angulaires correspondantes seront

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha_0 \lambda \sin\frac{i\pi}{2} \cos\frac{\mu}{\lambda}\frac{i\pi}{2},$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha_0 \mu \sin\frac{i\pi}{2} \cos\frac{\lambda}{\mu}\frac{i\pi}{2}.$$

Elles ne peuvent respectivement s'annuler que si $\frac{\mu}{\lambda}$ ou $\frac{\lambda}{\mu}$ est un nombre impair. Considérons le second cas ou supposons que $n = \frac{\lambda}{\mu}$ est un nombre impair. L'écart α s'annulera sans qu'il en soit de même de $\frac{d\alpha}{dt}$ pour les valeurs successives du temps $\frac{1}{n\mu}\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{n\mu}\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{n\mu}\frac{\pi}{2}, \ldots$, inférieures à $\frac{1}{\mu}\frac{\pi}{2}$. Quant t aura atteint cette dernière valeur, le pendule s'arrêtera dans la verticale, puis se remettra en mouvement. Le nombre des oscillations comprises dans cette période sera d'autant plus grand que

$$n = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon\frac{g}{l}}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon\frac{g}{l}}}} = -1 + \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon\frac{g}{l}}}}$$

sera lui-même plus grand ou $\frac{\varepsilon}{l}$ plus petit.

On comprend que, par l'influence de causes que nous n'avons pas fait intervenir dans le calcul, les choses se passeront encore de la même manière si $\frac{\lambda}{\mu}$, n'étant pas exactement un nombre impair, en diffère très-peu. On vérifie ainsi cet énoncé de Savart :

Le pendule, primitivement en repos, se met en marche peu à peu et l'autre s'arrête graduellement, puis se remet en mouvement, et le premier

s'arrête et ainsi de suite; le nombre des oscillations comprises dans chacune de ces périodes est d'autant plus grand que la verge verticale est plus rigide et les pendules sont plus longs et moins pesants.

Savart ajoute que n est d'autant plus grand que la verge horizontale est plus épaisse et plus courte, ce qui est dû à l'intervention de l'élasticité de cette verge, dont nous avons fait abstraction.

II. — *Pendules inégaux.*

Pour bien faire ressortir l'influence de l'inégalité de longueur des pendules, nous supposerons que le rapport $\frac{l'}{l} = \gamma$ soit assez petit pour que l'on puisse en négliger les puissances supérieures à la première; et, pour arriver à des résultats simples, nous admettrons que $\varepsilon\frac{g}{l}$ est du même ordre de grandeur que λ.

L'équation (6) donne

$$\frac{A_1}{A'_1} = \frac{1}{\varepsilon\frac{g}{l}}, \quad \frac{A_2}{A'_2} = -\frac{2\varepsilon\frac{g}{l}}{1-\gamma+\sqrt{(1-\gamma)^2+4\varepsilon^2\frac{g^2}{l^2}}} = -\varepsilon\frac{g}{l},$$

et l'équation (7)

$$K_1 = \sqrt{\frac{g}{l\left(1+\varepsilon\frac{g}{l}\right)}}, \quad K_2 = \sqrt{\frac{g}{l\left(\gamma+\varepsilon\frac{g}{l}\right)}}.$$

Ces simplifications, dans les valeurs K_1 et K_2, ne sont admissibles que pour de petites valeurs de t ou pour un nombre restreint d'oscillations.

L'expression $l\sqrt{1+\varepsilon\frac{g}{l}} = l_1$ est la longueur du pendule attaché à un point fixe qui serait isochrone avec le pendule l supposé fixé à l'extrémité de la lame de suspension; c'est ce que nous appellerons la *longueur réduite* du pendule. Dans tous les termes en ε, nous pourrons remplacer l par l_1.

Nous poserons en outre

$$l\left(\gamma+\varepsilon\frac{g}{l}\right)=l'_1,$$

et nous aurons ainsi, en continuant à supposer $\beta_1 = 0$, et remplaçant l par l_1 dans les termes en ε,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= A_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - A'_2\,\varepsilon\frac{g}{l_1}\cos\sqrt{\frac{g}{l'_1}}(t+\beta_2),\\ \alpha' &= A_1\,\varepsilon\frac{g}{l_1}\cos\sqrt{\frac{g}{l_1}}\,t + A'_2\sqrt{\frac{g}{l'_1}}(t+\beta_2).\end{aligned}\right.$$

1° *Les pendules sont écartés du même angle avec la verticale, mais en sens contraire, avant d'être abandonnés à eux-mêmes.*

On a

$$\alpha_0 = A_1 - \varepsilon\frac{g}{l_1}A'_2\cos\sqrt{\frac{g}{l'_1}}\,\beta_2,$$

$$-\alpha_0 = \varepsilon\frac{g}{l_1}A_1 + A'_2\cos\sqrt{\frac{g}{l'_1}}\,\beta_2.$$

On reconnaîtra, comme plus haut, en raison de ce que les vitesses initiales sont nulles, que l'on peut supposer

$$\beta_2 = 0,$$

d'où

$$A_1 = \alpha_0\left(1-\varepsilon\frac{g}{l_1}\right),\quad A'_1 = -\alpha_0\left(1+\varepsilon\frac{g}{l_1}\right)$$

et

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha_0} &= \left(1-\varepsilon\frac{g}{l}\right)\cos\sqrt{\frac{g}{l_1}}\,t + \varepsilon\frac{g}{l_1}\cos\sqrt{\frac{g}{l'_1}}\,t,\\ \frac{\alpha'}{\alpha_0} &= \varepsilon\frac{g}{l_1}\cos\sqrt{\frac{g}{l_1}}\,t - \left(1+\varepsilon\frac{g}{l_1}\right)\cos\sqrt{\frac{g}{l'_1}}\,t.\end{aligned}\right.$$

La durée des oscillations du pendule l sera donnée par

$$\sin\sqrt{\frac{g}{l_1}}\,t = -\varepsilon\frac{g}{l_1}\sqrt{\frac{l_1}{l'_1}}\sin\sqrt{\frac{g}{l'_1}}\,t = -\varepsilon\frac{g}{l_1\sqrt{\gamma}}\sin\sqrt{\frac{g}{l'_1}}\,t.$$

Quoique γ soit une petite fraction, comme $\sqrt{\gamma}$ est plus grand, nous admettrons que ε est assez petit pour que l'axe puisse négliger le carré de $\varepsilon\frac{g}{l_1\sqrt{\gamma}}$.

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$ les temps au bout desquels se terminent la première, la seconde, etc. oscillation. On voit sans difficulté, en ne perdant pas de vue le mode d'approximation adopté, que

$$t_i = \sqrt{\frac{l_1}{g}}\left(i\pi + \varepsilon\frac{g}{l_1\sqrt{\gamma}}\sin\frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}}\right),$$

et que l'écart, au bout de la $i^{\text{ième}}$ amplitude est

$$(12)\quad \alpha_i = \alpha_0\left(1-\varepsilon\frac{g}{l}\right)\cos i\pi + \alpha_0\varepsilon\frac{g}{l_1}\cos\frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}} = \alpha_0\cos i\pi + \varepsilon\frac{g\alpha_0}{l_1}\left(\cos i\pi - \cos\frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}}\right).$$

Désignons par t'_i, α'_i les équivalents de t_i et α_i pour le second pendule; nous aurons

$$(12')\quad \left\{\begin{aligned} t'_i &= \left(i\pi - \varepsilon\frac{g\sqrt{\gamma}}{l_1}\sin i\sqrt{\gamma}\pi\right)\sqrt{\frac{l'_1}{g}},\\ \alpha'_i &= -\alpha_0\left(1+\varepsilon\frac{g}{l_1}\right)\cos i\pi + \alpha_0\varepsilon\frac{g}{l_1}\cos i\sqrt{\gamma}\pi\\ &= -\alpha_0\cos i\pi - \alpha_0\varepsilon\frac{g}{l}(\cos i\pi - \cos i\sqrt{\gamma}\pi).\end{aligned}\right.$$

Pour faire voir plus nettement la marche des pendules, supposons que $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ soit un nombre entier n; la durée des oscillations du petit pendule sera constante et la même que s'il était seulement fixé à l'extrémité de la lame de suspension.

La durée de la $i^{\text{ième}}$ oscillation du second pendule

$$\mathrm{T}_i = \left[\pi + \varepsilon\frac{g}{l_1}\left(\sin\frac{i\pi}{n} - \sin(i-1)\frac{\pi}{n}\right)\right]\sqrt{\frac{l'_1}{g}}$$

sera plus grande que s'il était fixé à l'extrémité de la lame à partir de $i=1$ jusqu'au moment où l'on aura $i=n$; à partir de là, l'inverse aura lieu jusqu'au moment où l'on aura $i=2n$, et ainsi de suite.

Les écarts impairs et pairs de l seront d'abord respectivement plus grands et plus petits que α_0; le maximum des écarts pairs sera égal ou un peu inférieur, selon la valeur de n, à

$$\alpha_0\left(1+2\varepsilon\frac{g}{l_1}\right),$$

et le minimum des écarts impairs égal ou un peu inférieur à

$$\alpha_0\left(1-2\varepsilon\frac{g}{l}\right).$$

Ces deux écarts maximum et minimum se succéderont, puis les choses auront lieu en sens inverse et ainsi de suite.

Les écarts impairs et pairs, au contraire, seront d'abord respectivement plus petits et plus grands que α_0; le maximum et le minimum de α'_i seront atteints moins rapidement que ceux de α_i.

En supposant $m=m'$, l'équation (A) donne, pour la flèche de la lame,

$$f=\varepsilon(\alpha+\alpha'),$$

et, comme le maximum de α' se produit bien plus tardivement que celui de α, on voit que les plus grands écarts de la lame correspondront d'abord à ceux du long pendule.

Ces différentes conséquences sont d'accord avec les résultats obtenus par Savart.

2° *Les pendules partent sous un même angle mesuré du même côté de la verticale.*

On a

$$\alpha_0=A_1-\varepsilon\frac{g}{l_1}A'_2,\quad \alpha_0=\varepsilon\frac{g}{l_1}A_1+A'_2;$$

d'où

$$A_1=\alpha_0\left(1+\varepsilon\frac{g}{l_1}\right),\quad A'_2=\alpha_0\left(1-\varepsilon\frac{g}{l_1}\right)$$

et

$$\frac{\alpha}{\alpha_0}=\left(1+\varepsilon\frac{g}{l_1}\right)\cos\sqrt{\frac{g}{l_1}}\,t-\varepsilon\frac{g}{l_1}\cos\sqrt{\frac{g}{l'_1}}\,t,$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha_0}=\varepsilon\frac{g}{l_1}\cos\sqrt{\frac{g}{l_1}}\,t+\left(1-\varepsilon\frac{g}{l_1}\right)\cos\sqrt{\frac{g}{l'_1}}\,t.$$

En conservant les notations ci-dessus, on trouve

$$t_i = \sqrt{\frac{l_1}{g}}\left(i\pi - \varepsilon\frac{g}{l_1\sqrt{\gamma}}\sin\frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}}\right),$$

$$t'_i = \sqrt{\frac{l'_1}{g}}\left(i\pi + \varepsilon\frac{g}{l_1}\sqrt{\gamma}\sin i\pi\sqrt{\gamma}\right),$$

$$\alpha_i = \alpha_0\left(1 + \varepsilon\frac{g}{l_1}\right)\cos i\pi - \alpha_0\varepsilon\frac{g}{l_1}\cos\frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}} = \alpha_0\cos i\pi + \varepsilon\frac{g\alpha_0}{l_1}\left(\cos i\pi - \cos\frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}}\right),$$

$$\alpha'_i = \alpha_0\varepsilon\frac{g}{l_1}\cos i\pi\sqrt{\gamma} + \alpha_0\left(1 - \varepsilon\frac{g}{l_1}\right)\cos i\pi = \alpha_0\cos i\pi - \varepsilon\frac{g}{l_1}(\cos i\pi - \cos i\sqrt{\gamma}\pi).$$

La discussion de ces formules dans l'hypothèse où $\sqrt{\gamma}$ est un nombre entier conduit à des résultats semblables à ceux du numéro précédent; mais les inégalités dans les écarts pairs et impairs se produisent dans un ordre inverse.

3° *Le pendule le plus long est au repos lorsque l'autre se met en mouvement.*

On a

$$0 = A_1 - \varepsilon\frac{g}{l_1}A'_2, \quad \alpha_0 = \varepsilon\frac{gA'_1}{l_1} + A'_1,$$

d'où

$$A_1 = \alpha_0\varepsilon\frac{g}{l_1},$$

$$A'_2 = \alpha_0,$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \varepsilon\frac{g}{l_1}\left(\cos\sqrt{\frac{g}{l_1}}\,t - \cos\sqrt{\frac{g}{l'_1}}\,t\right),$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha_1} = \cos\sqrt{\frac{g}{l'_1}}\,t.$$

Le petit pendule est donc isochrone.

On a de plus

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} t_i &= \sqrt{\frac{l_1}{g}}\left(i\pi - \sin\frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}}\right),\\ \alpha_i &= \alpha_0\varepsilon\frac{g}{l_1}\left(\cos i\pi - \cos\frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}}\right).\end{aligned}\right.$$

En mettant en regard l'une de l'autre les secondes équations (12) et (14), on reconnaît que les variations éprouvées par α_i suivent la même loi dans le cas actuel et dans celui que nous avons étudié en premier lieu, ce qui est conforme à un résultat de l'expérience obtenu par Savart.

Les oscillations du pendule long restent très-petites si $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = n$ est entier et pair; tous les écarts de rang pair seront nuls ou le pendule ne décrira que des demi-oscillations. Dans le cas où n est impair, ce sont, au contraire, les écarts de rang impair qui sont nuls.

4° *Le pendule le plus court est en repos lorsque l'autre se met en mouvement.*

On a

$$\alpha_1 = A_1 - \varepsilon \frac{g}{l_1} A'_2, \quad 0 = \varepsilon \frac{g}{l_1} A_1 + A'_2,$$

d'où

$$A_1 = \alpha_0,$$

$$A'_2 = -\alpha_0 \varepsilon \frac{g}{l},$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \cos\sqrt{\frac{g}{l_1}}\, t,$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha_0} = \varepsilon \frac{g}{l_1}\left(\cos\sqrt{\frac{g}{l_1}}\, t - \cos\sqrt{\frac{g}{l'_1}}\, t\right).$$

Le pendule le plus long se mouvra donc sensiblement comme s'il était fixé directement à l'extrémité de la lame de suspension.

On a ensuite

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} t'_i &= \sqrt{\frac{l'_1}{g}}\,(i\pi - \sin i\pi\sqrt{\gamma}), \\ \alpha'_i &= \sqrt{\frac{l'_2}{g}}\,(\cos i\pi - \cos i\pi\sqrt{\gamma}). \end{aligned} \right.$$

La loi des variations de α'_i est la même que dans le second des cas que nous venons d'étudier, et qui est conforme à l'expérience.

On remarquera que les écarts de α' resteront toujours très-petits.

Si $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ est de la forme $2n$, n étant un nombre entier, le pendule sera au repos au bout de $(4n-1)$ oscillations, puis le mouvement reprendra, et ainsi de suite.

Dans le cas où $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = n$, n étant impair, le repos aura lieu à la fin de la $(n-1)^{\text{ième}}$ oscillation.

FIN DU TOME DEUXIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DEUXIÈME.

PLANCHES.

Pl. I. — Note sur le bassin miocénique d'eau douce de Koumi (Eubée).

Pl. II. — Examen critique d'une collection de plantes fossiles de Koumi (Eubée).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	
165	5	*au lieu de* (nº 72), *lisez* (nºs 71 *et seq.*).
172	12	ajouter $d\varphi$ à la fin.
175	5	*au lieu de* o, *lisez* 1.
176	dernière	*au lieu de* $1 - b^2$, *lisez* $1 + b^2$.
177	5 et 7	*au lieu de* $1 - b^2$, *lisez* $1 + b^2$.
177	7	*au lieu de* $\psi_n z$, *lisez* $\psi_m z$.
182	3	(en remontant), *au lieu de* $m^{\text{ième}}$ ordre, *lisez* $n^{\text{ième}}$ ordre.
192	2	ajouter après $\sqrt{a}$ ce qui suit: Si l'on faisait $\frac{m-a}{m+a} = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$, l'arc serait encore égal à une fonction elliptique de première espèce plus un logarithme (*loc. cit.*, p. 73).
197	7	*au lieu de* multipliées, *lisez* multipliés.